Schweins, Ferdinand

Analysis

Heidelberg 1820
4 Math.p. 336 n
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053848-3

4 Math. P. 336 — n

ANALYSIS

VON

FERD. SCHWEINS

DOCTOR DER PHILOSOPHIE UND ORDENTLICHEN ÖFFENTL. PROFESSOR DER MATHEMATIK

AN DER UNIVERSITÄT ZU HEIDELBERG.

HEIDELBERG

AUF KOSTEN DES VIRFASSERS UND IN COMMISSION BEI MOHR UND WINTER.

1820.

Vorrede.

Seit der Erscheinung des Werkes von Euler: „Einleitung in die Analysis des Unendlichen“ hat diese Wissenschaft, vorzüglich in Deutschland, grosse Fortschritte gemacht. Nicht sowohl die Nothwendigkeit, das neu Entdeckte, was zerstreut umher liegt, an das früher Bekannte zu knüpfen und alle Wahrheiten an einen Faden zu reihen, an dem sich das Ganze mit seinem Einzelnen leicht übersehen läfst, als hauptsächlich mehrere neue Untersuchungen, die mich schon seit einiger Zeit beschäftigen und in Verbindung mit dem schon Vorhandenen besser ge-

würdigt werden können, gaben mir Veranlassung, dieses Werk auszuarbeiten und dem Drucke zu übergeben. Das Inhaltsverzeichnifs giebt über das von Andern und das von mir Gefundene nähere Nachweisung. Wird diesem der Beifall der Verständigen nicht versagt, so wird bald Mehreres nachfolgen.

Im Februar 1820.

Schweins.

Inhalt.

Der Inhalt des ganzen Werks besteht in dem Vervielfachen und Messen der Factoren, welche bestimmten Gesetzen unterworfen sind, und in dem Aufsuchen der Gesetze bei den Producten, welche durch diese Geschäfte hervorgebracht werden.

)

Erste Abhandlung. Ueber das Binomium und Polynomium und Umkehrung der Reihen.

Um das Mannigfaltige leichter übersehen zu können, ist es in fünf Abtheilungen gebracht, nämlich 1) das Vervielfachen, 2) Messen, 3) Einschalten der Zwischenglieder 4) allgemeine Gesetze des Binomiums und Polynomiums, und 5) Umkehrung der Reihen.

Die erste Abtheilung enthält das Vervielfachen der Factoren, welche aus zweien oder mehreren Elementen bestehen. Hindenburg hat uns hier besonders zuerst das combinatorische Verfahren gelehrt. Das, was diese Abhandlung hierin Eigenthümliches hat, ist in §. 2. das Vervielfachen der Factoren $(a_1+b_1)(a_2+b_2) \ldots . (a_n+b_n)$, wobei die zweifachen geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen vorkommen.

Zweite Abtheilung. Das Messen der Reihen ist hier neu bearbeitet; der Zweck hierbei war, die Geschäfte, welche die Aufgabe vorschreibt, nicht zu umgehen, sondern sie selbst auszuführen, so lange es noch möglich ist, ihren Gang zu überschauen, und die Gesetze der Verbindungen der Elemente mit Sicherheit aus dem Geschäfte selbst abzuleiten. Da dieses sonst noch nicht geschehen ist, so ist es hier mit einiger Ausführlichkeit bewerkstelliget.

Die dritte Abtheilung: über das Einschalten der Zwischenglieder. Der Hauptgedanke, der diesem Verfahren bei Bildung des Binomiums für eine gebrochene Stellenzahl (Exponent) zum Grunde liegt, gehört dem Euler an; allein die Art, das Product $\mathfrak{A}^{p+q}_{n}$ in die bekannten einfacheren Producte zu zerlegen, habe ich aus der Analysis von Thibaut genommen. Den Beweis für das Polynomium bei einer gebrochenen Stellenzahl, und zwar ohne Hülfe des Binomiums oder anderer Mittel, glaube ich hier zuerst gegeben zu haben.

Die vierte Abtheilung. Die allgemeinen Gesetze des Binomiums und Polynomiums sind von mir sorgfältig gesammelt und erscheinen hier zuerst alle vereint. Die grossen Verdienste Hindenburgs um das allgemeine Grundgesetz 29 und 30 in §. 17 lernt man am besten schätzen, wenn man seine Schriften, worin er die Vorarbeiten anderer Mathematiker, z. B. des Moivre mit seltner Genauigkeit angiebt, selbst studirt. Das Gesetz 31, welches das Polynomium für jede mögliche Stellenzahl auf das Polynomium für eine ganze bejahete Stellenzahl zurückführt, hat zuerst Ernst Gottfried Fischer in seiner Theorie des Dimensionszeichens Seite 136 — 140 bekannt gemacht; obgleich es eine der nützlichsten Bildungsweisen enthält, wie die dritte und vierte Abhandlung zur Genüge beweisen werden, so ist es doch von allen jenen verkannt, welche nach ihm über Analysis geschrieben haben. Die zurücklaufende Bildungsweise 32, 33, 34, ... , welche in 37 zur grossen Allgemeinheit gesteigert ist, hat zuerst Rothe (Formulae de serierum reversione, §. III.) mit Hülfe der Differentialrechnung gefunden. Den Beweisen, welche J. F. Pfaff (Sammlung comb. Abhandlungen 1r Th. Seite 133), und Thibaut (Analysis Seite 364) geben, liegt Differentialrechnung zum Grunde. Ich bin hierbei dem Weingärtner (comb Analysis) gefolgt, und habe dadurch, dafs ich, wie Prasse, bei einer anderen Untersushung (Usus logarithmorum Seite 22) gethan hat, den Verbindungen die Stellenzahl des ersten Elements vorsetze, ohne Differentialrechnung das Gesetz bewiesen. Dieses Gesetz ist eines der wichtigsten, welches die Analysis aufzuweisen hat. Aus ihm folgt mit Leichtigkeit das Gesetz 38, welches bei Euler zuerst gefunden wird. Das allgemeine Gesetz 42 (39, 40, sind nur Vorbereitungen zu diesem) ist zuerst von Rothe (Formulae de ser. rev. §. VI) gefunden. Durch die Art, wie ich hier den Beweis gebe, habe ich den Weg bezeichnet, auf welchem das Gesetz aufgefunden werden kann. Nachdem Rothe dieses allgemeine Gesetz, wovon das obige 37 nur ein besonderer Fall ist, entdeckt hatte, fand J. F. Pfaff

)*

(Archiv der Math. V. Heft Seite 69—71) durch Differentialrechnung noch allgemeinere Gesetze. Das Verfahren, welches ich bei 42 eingeschlagen habe, hat mich zu den Gesetzen 45, 46, 47, geführt, welche jenen ähnlich sind, die Pfaff gefunden hat, und zuletzt zu dem Gesetze 48 geleitet, welches allgemeiner ist, als alle vorhergehenden.

Fünfte Abtheilung. Zu der Umkehrung der Reihen hat zuerst Eschenbach (de serierum reversione Lpz. 1789) eine unabhängige Bildungsweise der Vorzahlen bekannt gemacht, welche nach ihm von Rothe zur gröfsten Vollkommenheit gebracht ist. Wahrheit und Beweis habe ich von Rothe entlehnt (de serier. revers. 1793).

Zweite Abhandlung: über die Exponentialgrössen.

Die ganze Untersuchung über die Entwicklung der Exponentialgrössen besteht in der Beantwortung folgender zwei Fragen: es sey

$$a^{bx^1+cx^2+dx^3+\ldots} = 1+Ax^1+Bx^2+Cx^3+\ldots$$

1) wie werden die Vorzahlen A, B, C, ... aus den Vorzahlen b, c, ... und

2) wie die Vorzahlen b, c, d, ... aus den Vorzahlen A, B, C, ... gefunden?

Die erste Aufgabe wird hier auf das Binomium zurückgeführt, und das erste Glied A auf die gewöhnliche Weise gefunden; allein das Gesetz für das zweite und für die späteren Glieder ist hier sowohl durch ein directes Verfahren, welches bis jetzt noch nicht bekannt war, als durch das schon bekannte indirecte Verfahren aufgesucht. — Für die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen A, B, C, . . . gebe ich hier ferner eine neue sehr allgemeine Formel 57, wovon die bis jetzt bekannte 58 ein ganz einzelner Fall ist.

Die Gleichung, welche für die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen A, B, C, ... gefunden wird, gilt auch für die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen b, c, d, . . . und löset also dadurch beide Aufgaben; die beiden unabhängigen Bildungsweisen der Vorzahlen b, c,

d, . . . (durch die Potenzen des verkürzten und der vollständigen Reihe in 63 und 64) beschliessen die vollständige Auflösung der vorgelegten Aufgabe.

Auf die einzelnen Fälle a^x, e^x, $\lg(1+x)$ folgen noch in §. 35 einige neue Reihen für $\lg(1+x)$ und $\lg\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\}$, wovon N. 77 zuerst Dubourguet (Annall. math. T. II. pag. 69, 286) durch Integralrechnung gefunden hat; ich habe hier das Verfahren von Servois (Ann. math. Seite 178) befolgt, und auf diesem Wege noch einige andere Reihen gefunden.

Dritte Abhandlung: über die Entwicklung einiger besonderer Polynomien.

In der ersten Abhandlung mufsten, um den Faden der Untersuchung nicht zu unterbrechen, alle Beispiele ausgeschlossen werden. Um aber doch den Nutzen der mannigfaltigen Hülfsmittel bei Entwicklung der Reihen, welche die erste Abhandlung darbietet, an bestimmten Beispielen zeigen zu können, habe ich ihnen hier einen besondern Platz im Werk angewiesen. Ich habe solche Reihen gewählt, welche theils in den folgenden Abhandlungen, theils in andern Theilen der Wissenschaft wieder vorkommen; sie sind also wirkliche Themata und sind ihrer Natur nach Bestandtheile der Wissenschaft. Dadurch, dafs ihnen hier eine besondere Abhandlung gewidmet wird, werden die Wahrheiten, welche vereint ein Ganzes bilden, nicht zersplittert. Die Functionen, welche hier entwickelt werden, sind

1) $\{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+1\}^n$, 2) $(e^x+1)^n$, 3) $(e^x-1)^n$, 4) $\{-\lg(1-x)\}^n$

5) $\left\{1+\frac{a}{b}x+\frac{a(a+f)}{b(b+h)}x^2+\frac{a(a+f)(a+2f)}{b(b+h)(b+2h)}x^3+\ldots\right\}^n$

Das Allgemeine bei der Entwicklung dieser besondern Reihen besteht 1) in der Anwendung der allgemeinen Gesetze, welche in der ersten Abhandlung für das Polynomium gefunden sind, und 2) in einer schicklichen Benutzung der Eigenthümlichkeiten des jedesmaligen Falles. Indem ich diese Idee

der Abhandlung zum Grunde legte, hatte ich Gelegenheit, nicht allein die vorzüglichst bekannten, sondern auch mehrere neue Bildungsweisen der Glieder in den Reihen zu entdecken.

Es ist mir nicht bekannt, dafs der erste Fall auf die Weise behandelt sey, wie hier geschehen. Der dritte Fall ist der wichtigste. Die Entwicklung in §. 45. für das ganze bejahete n finde ich zuerst bei Weingärtner (comb. Anal. 2r S. 218). Die vollständige Entwicklung für jedes n in §. 47. gründet sich auf die oben erwähnte Fischersche Formel. — Man weifs, dafs aus den Gliedern der Reihe, wenn $n = -1$ ist, die Bernoullischen Zahlen entspringen, womit sich Euler in seiner Differentialrechnung so sehr beschäftiget. Der Weg, welchen ich in dieser Abhandlung eingeschlagen, und oben gleich zu Anfange bezeichnet habe, führt nicht allein zu den hauptsächlichsten von Euler entdeckten, sondern auch zu mehreren neuen, zurücklaufenden Bildungsweisen; hieher rechne ich unter andern die Entwicklungen in den §§. 50, 51 und 52. Die Entwicklung in §. 51. wird durch die Zerfällung des Bruches $\frac{1}{e^{2x}-1}$ in zwei andere Brüche bewerkstelliget; Laplace bedient sich auch dieser Zerfällung; diese Entwicklung und ihre Resultate sind aber ganz verschieden von jener des Laplace.

Bei der Entwicklung von $\{-\lg(1-x)\}^n$ für das ganze bejahete n ist Weingärtners comb. Analysis 2r Th. S. 208 benutzt, und die allgemeine Entwicklung für jedes mögliche n ist durch die erwähnte Fischersche Formel gewonnen.

Mit der Entwicklung des Polynomiums

$$(1+\frac{a}{b}x+\frac{a(a+f)}{b(b+h)}x^2+\ldots)^n$$

hat sich zuerst Rothe (Samml. comb. Abhh. 2r Theil Seite 306) beschäftiget.

Zu spät habe ich bemerkt, dafs hier einige Sätze über Potenzen und Producte gewisser Reihen von J. F. Pfaff (Samml. comb. Abhh. 1r Th. Seite 123) hätten aufgenommen werden können.

Vierte Abhandlung: über die Theile des Binomiums.

Es ist bekannt, dafs man, um die Functionen in die allgemeine Grösenlehre zu verpflanzen, in der Entwicklung von e^x gesetzt hat $x\sqrt{-1}$ statt x. Dieses Verfahren ist sehr gesucht, und eben deshalb noch nicht das wahre. Tralles hat in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1812 — 1813 Seite 161 zuerst zwei andere Wege bekannt gemacht; der eine führt durch Bildung symmetrischer Functionen, der andere durch die Auflösung der Frage: wie müssen die Functionen beschaffen seyn, wenn ihre Werthe zwischen +1 und —1 fallen sollen? zu den Kreisfunctionen. So sinnreich auch das Verfahren von Tralles ist (immer bleibt ihm das Verdienst, aus neuen Gesichtspuncten den Gegenstand betrachtet zu haben), so glaubte ich doch, dafs es der Natur der Sache angemessen sey, nicht erst das zu suchen, was schon gegeben ist, nämlich das Binomium und seine Theile. Diese Bemerkung ging aus der Vergleichung der Reihen für die Sinusse und Cosinusse mit dem Binomium $(a \pm b)^n$ hervor, und bezeichnete mir den Weg, den ich bei einer neuen Bearbeitung des Gegenstandes einzuschlagen hatte. Es wird b nicht mit $\sqrt{-1}$, wodurch die Allgemeinheit sehr gestört wird, sondern mit einer willkürlichen Grösse i, welche jeden Werth annehmen kann, verbunden; das Binomium wird in zwei Theile und zwar in jenen mit den geraden und in jenen mit den ungeraden Potenzen von i zerlegt, und jener durch φn und dieser durch ψn bezeichnet. Hierdurch entstehen zwei Reihen

$$\ldots \varphi(-n), \ldots \varphi(-2), \varphi(-1), \varphi(0), \varphi(+1), \varphi(+2), \ldots \varphi(+n), \ldots$$

$$\ldots \psi(-n), \ldots \psi(-2), \psi(-1), \psi(0), \psi(+1), \psi(+2), \ldots \psi(+n), \ldots$$

in welchen alle Glieder gleichen Gesetzen unterworfen sind, und in wel-

chen z. B. das 3oste Glied eben so aus dem 5ten Gliede gebildet wird, als das 6te aus dem ersten. Eine dritte Reihe

$$\ldots, \frac{\psi(-n)}{\varphi(-n)}, \ldots \frac{\psi(-1)}{\varphi(-1)}, \frac{\psi 0}{\varphi 0}, \frac{\psi 1}{\varphi 1}, \ldots, \frac{\psi n}{\varphi n}, \ldots$$

oder

$$\ldots, \tau(-n), \ldots \tau(-1), \tau(0), \tau(+1), \ldots, \tau(+n), \ldots$$

ergiebt sich durch das Messen der entsprechenden Glieder der beiden vorhergehenden Reihen, in welchen wieder die Glieder gleichen Gesetzen folgen. Nachdem gefunden ist, wie jedes spätere Glied einer der Reihen entweder 1) aus den beiden ersten $\varphi 1$ und $\psi 1$ oder 2) nur aus einem dieser beiden Glieder, oder 3) aus allen vorhergehenden Gliedern, oder 4) nur aus einigen der vorhergehenden Glieder gebildet werden kann, geht die Untersuchung über zur Entwicklung der Glieder φn, ψn und τn nach den Potenzen von n oder λn der Stellenzahl des Gliedes und dann zu der umgekehrten Aufgabe, nämlich zu der Entwicklung der Stellenzahl λn aus dem Gliede φn, ψn, τn. Zuletzt folgen die Entwicklungen der Potenzen der Glieder dieser Reihen, nämlich $\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n$, $\left\{\frac{i\psi p}{\delta^p}\right\}^n$, $(i\lambda p)^n$, $(i\tau p)^n$. Bei der letzten $(i\tau p)^n$ habe ich einen Aufsatz von Rothe (Sammlung comb. Abhh. 2r Theil Seite 306) benutzt.

Das Resultat der ganzen Abhandlung ist, dafs die beiden Theile des Binomiums symmetrische Functionen sind, und dafs die Kreisfunctionen nur einen einzelnen Fall von diesen ganz allgemeinen Functionen ausmachen. Dieses bewährt der letzte Theil dieser Abhandlung, in welchem nur gezeigt ist, wie die Eigenthümlichkeiten der Kreisfunctionen in den allgemeinen Gesetzen der hier aufgestellten allgemeinen Functionen des Binomiums schon enthalten sind. Ich habe mich mit den einzelnen Functionen, welche in den allgemeinen enthalten sind, nicht ferner beschäftiget, damit nicht der Hauptzweck dieser Abhandlung verfehlt werde.

Fünfte Abtheilung: Producte gleichzunehmender Factoren.

Die Untersuchung über diese Producte von Kramp (Refract. astron. Seite 46), von ihm Facultätenrechnung genannt, ist die Grundlage dieses wichtigen Zweiges der allgemeinen Grössenlehre. Obgleich Vandermonde in den Schriften der Pariser Academie über diese Producte schon nachgedacht hat. so bleibt doch ersterem das grosse Verdienst, nicht allein die Hauptwahrheiten einem allgemeinen Algorithmus unterworfen, und so eine wissenschaftliche Bearbeitung begründet, sondern auch durch den Umfang, welchen er der Untersuchung giebt, die Wissenschaft mit einer sehr grossen Menge neuer und merkwürdiger Wahrheiten bereichert zu haben. Seit der Erscheinung dieses Werkes (im Jahre 1799) hat er selbst einige Zusätze in den Annales mathematiques par Gergonne Tome III. vom Jahre 1812—1813, Seite 1—13, 114—132, 325—344 bekannt gemacht; auch Bessel giebt im Königsberger Archive 1r Bd. 1812 Seite 241 und Argand in den Annal. math. T. V. 1814—1815, Seite 236, einige Erläuterungen über diesen Gegenstand.

Hier erscheint eine zweite Bearbeitung dieser Producte, denn das, was seit 1799 hierüber erschienen ist, enthält nur Zusätze zu der ersteren. Die ganze Abhandlung zerfällt in folgende Abtheilungen:

1. Algorithmus nebst Verwandlung der Producte,
2. Entwickelung von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von a und r

$$a^{n|r} = \alpha(n,0)\,a^n r^0 + \alpha(n,1)\,a^{n-1} r^1 + \alpha(n,2)\,a^{n-2} r^2 + \ldots.$$

3. Die umgekehrte Aufgabe oder die Entwicklung der Reihe

$$a^n = \delta(n,0)\,a^{n|r} + \delta(n,1)\,a^{n-1|r} + \delta(n,2)\,a^{n-2|r} + \ldots.$$

4. Zerlegung des zusammengesetzteren Products in einfachere Producte

$$(a+b)^{n|r} = k(n,1)\,a^{n|r}\,b^{0|r} + k(n,2)\,a^{n-1|r}\,b^{1|r} + k(n,3)\,a^{n-2|r}\,b^{2|r} + \ldots.$$

5. Entwicklung von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von n

$$a^{n|r} = \gamma(a,r,0).n^0 + \gamma(a,r,1).n^1 + \gamma(a,r,2).n^2 + \ldots.$$

6. Entwicklung des Logarithmen von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von n,

$$\lg: a^{n|r} = \mu(a,r,1).n^1 + \mu(a,r,2).n^2 + \mu(a,r,3).n^3 + \ldots.$$

7. Entwicklung des Logarithmen von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von r

$$\lg : a^{n|r} = \zeta(a,r,0).r^0 + \zeta(a,r,1).r^1 + \zeta(a,r,2).r^2 + \ldots.$$

8. Besondere Entwicklung des Logarithmen von $a^{n|r}$

$$\lg : a^{n|r} = -n + (\frac{1}{2} - \frac{a}{r}) \lg : a + (n + \frac{a}{r} - \frac{1}{2}) \lg (a+nr)$$
$$+ 1^{0|1} E^{-1} v3 . P^1 + 1^{2|1} E^{-\frac{1}{2}} v5 . P^3 + 1^{4|1} E^{-1} v7 P^5 + \ldots.$$
$$- 1^{0|1} E^{-1} v3 . p^1 - 1^{2|1} E^{-1} v5 . p^3 - 1^{4|1} E^{-1} v7 . p^5 - \ldots.$$

wo $P = \frac{r}{a+nr}$ und $p = \frac{r}{a}$ ist.

9. Anhang, bestehend in der Entwicklung der Producte aus ungleich zunehmenden Factoren

$$1+a_1 \; , \; 1+a_2 \; , \; 1+a_3 \; , \; 1+a_4 \; , \; \ldots \ldots$$

Das, was in dieser Abhandlung von Kramp entlehnt ist, ist folgendes: in der

ersten Abtheilung: der Algorithmus, so wie ihn Kramp zuerst aufgestellt hat, und die Verwandlung der Producte in den §§. 86 und 87;

zweiten Abth.: die Entwicklung von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von a und r in §§. 88 und 99;

dritten Abth.: die umgekehrte Reihe (Ref. ast. pag. 83) wozu er den Beweis nicht gegeben hat;

vierten Abth.: die Reihe für $(a+b)^{n|r}$ nebst den Veränderungen, ohne Beweis; die Wahrheiten in §. 102 findet man in seinen Zusätzen (Annal. math. T. III. pag. 335);

fünften Abth.: die Reihe für das Glied $\gamma(1,r,1)$ in N. 341, welche Kramp durch $\Lambda(r)$ bezeichnet und durch Differentialrechnung findet.

achten Abth.: die Reihe, welche Kramp mit Γ bezeichnet, und durch Differentialrechnung findet.

Aus der Abhandlung von Bessel im Königsb. Arch. habe ich den Inhalt der §§. 112 und 113 genommen.

Das Neue, welches diese zweite Bearbeitung hervorgebracht hat, besteht 1) in der Sonderung der verschiedenen Aufgaben, ohne welche kein Ueberblick möglich ist, 2) in neuen Beweisen zu den von Kramp gefundenen Wahrheiten und 3) in Auffindung einer Menge neuer Wahrheiten. Das Vorzüglichste, was von mir ist, uud was ich glaube hier zuerst bekannt zu machen, will ich kurz erwähnen: in der

zweiten Abtheilung: N. 286 in §. 89 und der ganze Inhalt von den §§. 9^0, 9^1, 9^2;

dritten Abth.: der Beweis sowohl für das bejahete als verneinte n.

vierten Abth.: neue Beweise verschieden von jenen des Kramp.

fünften Abth.: die allgemeinen und besondern Bildungsweisen aller Glieder ausser dem Gliede $\gamma(1,r,1)$; besonders merkwürdig ist das Gesetz für $\gamma(a,r,2)$ in N. 346;

sechsten Abth.: die sämmtlichen Wahrheiten mit ihren Beweisen;

siebenten Abth.: alle Wahrheiten in §. 110 bis §. 117 ausser jenen in §. 112 und 113;

achten Abth.: Beweis ohne Differentialrechnung.

Zu dem Anhang hat Buzengeiger im Archive der Math. 6tes Heft Seite 172 den Stoff gegeben.

In der ganzen Abhandlung habe ich vermieden, in $a^{n:r}$ die Stellenzahl n einem Bruche gleichzusetzen, und zwar nicht deswegen,

weil ich glaubte, dafs dieses nicht geschehen dürfe, sondern weil die Untersuchung für $n = \frac{p}{q}$ mit andern Gegenständen in Verbindung steht, welche ich in diesem Werke nicht aufgenommen habe.

Sechste Abhandlung: über geordnete Verbindungen ohne und mit Wiederholungen.

So sehr sich auch Hindenburg mit diesem Gegenstande beschäftiget hat, so hat er doch noch Vieles seinen Nachfolgern aufzusuchen übrig gelassen. Ich theile über diesen Gegenstand hier eine Menge neuer Wahrheiten mit, deren Wichtigkeit die folgenden Abhandlungen darthun werden; von den vorzüglicheren dieser Gleichungen kommt schon eine und zwar 411 Seite 254. in einer Abhandlung von Posselt (Dissert. anal. de Functionibus quibusdam symmet. 1818) vor.

Siebente Abhandlung: Producte aus Factoren mit wiederkehrenden Elementen.

Ich verstehe hierunter diejenigen Producte, auf welche Euler (Inst. cal. int. T. II. pag. 356) zuerst aufmerksam gemacht hat:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \quad \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)}, \quad \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)}, \ldots$$

oder wie sie hier zuerst ganz allgemein untersucht werden

$$\{(a_1+ub_1)(a_1+ub_2)(a_1+ub_3)\ldots\}^{\mp 1}, \quad \{(a_2+ub_1)(a_2+ub_2)(a_2+ub_3)\ldots\}^{\mp 1},$$
$$\{(a_3+ub_1)(a_3+ub_2)(a_3+ub_3)\ldots\}^{\mp 1}, \ldots$$

Auf diese erste Anregung von Euler hat zuerst Fufs (Acta acad. petropolitanae 1777. P. I.) Untersuchungen hierüber angestellt (solche habe ich nicht benutzen können). Die gröfsten Verdienste um diesen Gegenstand scheint mir Posselt sich in seiner Dissertation (Dissertatio analyt. de functionibus quibusdam symmetricis) erworben zu haben, indem er zu den schon bekannten Wahrheiten zuerst die Beweise aus der Natur des

Gegenstandes hergeholt und eine grosse Menge neuer Wahrheiten aufgefunden hat. Obgleich ich diese Arbeit von Posselt bei der meinigen benutzt habe, so glaube ich doch, dafs diese Abhandlung 1) durch eine von jener verschiedene Behandlung und 2) durch eine viel grössere Ausdehnung mehreres Eigenthümliche gewonnen hat, wodurch sie sich von jener Arbeit unterscheidet, und wie ich glaube, nicht ohne Nutzen für die Wissenschaft, und zwar dieses hauptsächlich durch Einführung der Grösse u, durch Vereinigung der auf gleiche Art gebildeten Producte unter einem Gesichtspunete, theils auch durch die Untersuchung nicht allein von $a(a_x + ub_y; k)^{-1}$, sondern auch von $a(a_x + ub_y; k)^{+1}$.

Achte Abhandlung: Producte aus Factoren bestehend, deren Zunahmen die Glieder der Potenzenreihe sind.

Ein bis jetzt fast ganz neuer Gegenstand, und wovon sich nur hin und wieder einige Bruchstücke finden.

Euler hat zuerst in seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen (Uebersetzung von Michelsen 1r Th. Seite 338 und 343) das unendliche Product

$$\{(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\ldots\}^{\mp 1}$$

in eine Reihe nach den Potenzen von z entwickelt, und aus der Entwicklung Folgerungen nur in Hinsicht der Zerlegung einer Zahl in alle mögliche Theile gezogen, und also ganz andere Betrachtungen angestellt, als hier bezweckt werden.

Im Lehrbuche der Arithmetik von Rothe 2r Th. 1811 Vorrede XXIX. findet man folgende Stelle „Lehrsatz, dafs, wenn n Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, das Product aus n Factoren

$$(x+z)(x+az)(x+a^2z)(x+a^3z)\ldots(x+a^{n-1}z) =$$

$$= x^n + \frac{a^n-1}{a-1} z + \frac{(a^n-1)(a^n-a)}{(a-1)(a^2-1)} z^2 + \frac{(a^n-1)(a^n-a)(a^n-a^2)}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} z^3 + \ldots\ldots \text{ ist.“}$$

Denselben Lehrsatz, welchen Rothe ohne Beweis hinstellt, findet man auch mit denselben Buchstaben in den Abhandlungen der Berliner Academie vom Jahre 1814 — 1815. Seite 36 von Grüson, aber nur auch für das ganze bejahete n bewiesen. Ferner findet man, wenn

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots.(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.(1-x^\mu)} = (m,\mu)$$

gesetzt wird, in den Comment. societ. scient. Gött. recens. Vol. I. 1811 folgende drei Wahrheiten von Gaufs bewiesen, Seite 8

$$(m,\mu+1) = (\mu,\mu)+x(\mu+1,\mu)+x^2(\mu+2,\mu)+\ldots.+x^{m-\mu-1}(m-1,\mu)$$

Seite 9

$$(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots.(1-x^{m-1}) = 1-(m,1)+(m,2)-(m,3)+(m,4)-\ldots.$$

und Seite 12

$$(2+x^{\frac{1}{2}})(1+x)(2+x^{\frac{3}{2}})(1+x^2)\ldots.(1+x^{\frac{1}{2}m}) =$$

$$= 1+x^{\frac{1}{2}}(m,1)+x(m,2)+x^{\frac{3}{2}}(m,3)+x^2(m,4)+\ldots.$$

In der oben schon erwähnten Abhandlung von Pòsselt findet man auch die Summe folgender Reihe

$$x^{1-(n-r)}-x^{3-2(n-r)}(n,1)+x^{6-3(n-r)}(n,2)-\ldots\ldots.$$

In dieser Abhandlung, welche ich hier vorlege, glaube ich zuerst die Grundlage zu einer Theorie dieser Producte zu geben, 1) indem ich den Algorithmus für die Reihe dieser Producte feststelle, welcher sowohl in dem Gesetze der Bezeichnung, (nicht der Zeichen, wofür andere gewählt werden können), als in dem Gesetze, nach welchem die späteren Producte aus den vorhergehenden und diese wieder aus jenen gebildet werden, und in der Bestimmuug des Mittelgliedes, welches dem 1 entspricht, besteht; so wie dieses der Fall ist bei der Potenzenreihe . . . $a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots.$

und auch bei der Productenreihe mit gleichen Unterschieden von Kramp . . . $a^{-2|r}, a^{-1|r}, a^{0|r}, a^{1|r}, a^{2|r}, \ldots\ldots$; 2) Indem ich ferner die Hauptentwicklung nicht allein für das Product $(1+ux^a)^{n;b}$ mit einer bejaheten Stellenzahl $+n$ sondern auch für das Product $(1+ux^a)^{-n;b}$ mit einer verneinten Stellenzahl $-n$ vornehme und beide Entwicklungen gemeinsamen Gesetzen unterwerfe; und 3) indem ich zuletzt mehrere, nicht allein die bekannten, welche oben erwähnt sind, sondern auch mehrere neue besondere Entwicklungen in Reihen vornehme, welche nicht in der allgemeinen enthalten sind.

Die Wahrheit des hier aufgestellten Algorithmus bewährt sich durch die Veränderungen der Producte in §. 146, und zwar auf die Weise, dafs die sämmtlichen Gleichungen sowohl für das bejahete n als für das verneinte n gelten.

Die Formel von Rothe und jene von Posselt sind als besondere Fälle in der allgemeinsten Entwicklung 483. enthalten; die erste Reihe von Gaufs findet man hier in §. 153, die zweite in §. 154. zugleich aber auch mit einem vollständigen Beweise für das verneinte n, und die dritte auch in §. 154; die Entwicklung von Euler ist in §. 152.

Die sechs neuen besonderen Entwicklungen in §. 151. gründen sich auf die Untersuchung der geordneten Verbindungen ohne und mit Wiederholungen in der 6ten Abhandlung.

Neunte Abhandlung. Summirung der Reihen.

Die Summirungen der Reihen im Allgemeinen biethen, wie jedem Mathematiker bekannt ist, grosse Schwierigkeiten dar. Die Theorie, welche ich hier zuerst liefere, erstreckt sich auf die Summirung einer sehr grossen Classe von Reihen; sie legt immer eine Reihe zum Grunde, deren Summe bekannt ist, und lehrt nun die Reihen summiren, deren Glieder mit den

sehr allgemeinen Producten $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots$, $(2+a_1)(2+a_2)(2+a_3)\ldots$, $(3+a_1)(3+a_2)(3+a_3)\ldots$, $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots$, vervielfacht sind. Die ganze Untersuchung zerfällt in sechs Abtheilungen und zwar

I. Abtheilung. $(1+a_1|p)1^{n|1}_{,}+(2+a_1|p)2^{n|1}_{,}+\ldots+(x+a_1|p)x^{n|1}_{,}$

II. Abth. $(1+a_1|p)\frac{u^{n+1|1}}{v^{1|1}}+(2+a_1|p)\frac{u^{n+2|1}}{v^{2|1}}+\ldots+(x+a_1|p)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}}$

III. Abth. $(0+a_1|p)z^0n^{0|-1}_{,}+(1+a_1|p)z^1n^{1|-1}_{,}+\ldots+(n+a_1|p)z^nn^{n|-1}_{,}$

IV. Abth. $(0+a_1|p)n^{0|-1}_{,}b^{n|h}d^{0|h}+(1+a_1|p)n^{1|-1}_{,}b^{n-1|h}d^{1|h}+\ldots$

$\ldots+(n+a_1|p)n^{n|-1}_{,}b^{0|h}d^{n|h}$

V. Abth. Allgemeines Verfahren bei dieser Summirungsweise.

VI. Abth. Summirung der geordneten Verbindungen, sowohl ohne als mit Wiederholungen.

Die beiden ersten Abtheilungen haben das Eigenthümliche, dafs ihre Summen noch drei Umformungen zulassen, welche in der dritten und vierten Abtheilung nicht vorkommen. Merkwürdig sind in dieser Untersuchung die zweifach und sogar vierfach in einander verschlungenen geordneten Verbindungen ohne und mit Wiederholungen, welche ich zuerst im Jahre 1812 bei diesem Gegenstand entdeckte, und sonst noch nirgends gefunden habe. Ich habe die Untersuchung in einer Allgemeinheit erhalten, als nur möglich ist, und bin nur sparsam zu einzelnen Fällen übergegangen, wozu besondere Veranlassung einlud, so z. B. bei der Reihe $1^p+2^p+3^p+\ldots+x^p$, deren Summe sonst nur durch Bernoullische Zahlen, hier aber auf eilf verschiedene Arten durch einfache und auch durch zusammengesetzte Combinationen dargestellt wird.

Vorarbeiten, welche ich bei dieser Untersuchung hätte benutzen können, sind mir nicht bekannt, so sehr ich mich auch nach ihnen umgesehen habe. Das, was ich in dieser Hinsicht auffand, sind einige Beispiele, die als ganz einzelne Fälle in dieser Untersuchnng vorkommen, als die

Summe 645, 675, wovon letzteres bei Fischer (Theorie des Dim. 1r Th. Seite 152) vorkommt. Ferner erwähne ich, dafs aus der Gleichung 689 jene leicht gefol ert werden kann, welche Rothe (de ser. rev. Seite 31) ohne Beweis giebt, wie auch, dafs schon Kramp (Samml. comb. Abh. 2r Th. Seite 353) sich mit der Summirung der Reihe $1^p+2^p+ \ldots +x^p$ beschäftiget, aber nur eine combinatorische Formel Seite 355, und eine zweite vermittelst Differenzen der Zahlen 1, 2, 3, . . . dargestellt hat; und zuletzt, dafs von den fünf unabhängigen Bildungsweisen der Summen der geordneten Verbindungen mit Wiederholungen schon zwei, nämlich 714 und 722, bei Bilfinger (de progressionibus localibus commentatio 1794 pag. 25, 34) und eine von den sechs zurücklaufenden Bildungsweisen der Summen der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, und auch eine von den sechs mit Wiederholungen schon bei Kramp (Refr. ast. pag. 75, 76) vorkommt.

Einleitung.

I.

Das Vervielfachen und Messen verbunden mit dem Zu- und Abzählen führt, wenn wir das Vervielfachen und Messen vor dem Zu- und Abzählen vornehmen, mannichfaltige Verbindungen der Elemente herbei, welche, damit der Vortrag nicht unterbrochen werde, hier zuerst gewürdigt werden sollen.

Beim Vervielfachen im Allgemeinen entstehen alle Verbindungen zu zweien, dreien, vieren, ... als

a , b , c , d

aa	ab	ac	ad
ba	bb	bc	bd
ca	cb	cc	cd
da	db	dc	dd

aaa	aab	aac	aad
aba	abb	abc	abd
aca	acb	acc	acd
ada	adb	adc	add
baa	bab	bac	bad
bba	bbb	bbc	bbd
bca	bcb	bcc	bcd
bda	bdb	bdc	bdd

caa	cab	cac	cab
cba	cbb	cbc	cbd
cca	ccb	ccc	ccd
cda	cdb	cdc	cdd
daa	dab	dac	dad
dba	dbb	dbc	dbd
dca	dcb	dcc	dcd
dda	ddb	ddc	ddd

aaaa . . . . .

. . . . . .

II.

Indem wir die Natur dieser Verbindungen näher untersuchen, finden wir, dafs sie sämmtlich in zwei Abtheilungen gebracht werden können. Die erste Abtheilung enthält Verbindungen, worin dieselben Elemente vorkommen, aber mit veränderter Stellung, und die zweite enthält Verbindungen, welche eins oder mehrere verschiedene Elemente enthalten, und sich besonders dadurch auszeichnen, dafs ihre Elemente so geordnet sind, dafs nie ein früheres auf ein späteres Element folgt. Jene mögen Versetzungen und diese geordnete Verbindungen genannt werden.

Das Auffinden aller

Versetzungen

fordert eine bestimmte Anordnung des Geschäfts, und diese mag darin bestehen, dafs die Versetzungen nach dem Anfangselemente auf einander folgen. Nach diesem werden wir jedesmal so viele Ordnungen erhalten, als Elemente vorhanden sind und jede Ordnung wird bei n Elementen aus so vielen Versetzungen bestehen, als n — 1 Elemente versetzt werden können. Die Anzahl der Versetzungen ist also

bei 1 Elemente 1

2 — — 1 . 2

3 — — 1 . 2 . 3

. . . . . .

n — — 1 . 2 . 3 . 4 . . . . n

Die Versetzungen selbst sind

bei zweien Elementen ab , ba

— dreien — — abc , bac , cab
acb bca cba

bei vier Elementen abcd , bacd , cabd , dabc
abdc badc cadb dacb
acbd bcad cbad dbac
acdb bcda cbda dbca
adbc bdac cdab dcab
adcb bdca cdba dcba

Die Gleichheit einiger Elemente ändert nichts in der Anordnung der einzelnen Versetzungen und nichts im ganzen Geschäfte, sie bewirkt nur, dafs weniger Verbindungen entstehen. Sind z. B. drei Elemente a, b, c gleich, so erscheinen alle die Verbindungen

abcd , acbd , bacd , bcad , cabd , cbad nur als eine aaad

und so auch

abdc , acdb , badc , bcda cadb , cbda — — — — aada

u. s. w.

es entstehen also so vielmal weniger Verbindungen, als sich drei verschiedene Elemente versetzen lassen. Bei n Elementen ist also die Anzahl aller möglichen Versetzungen $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, und überhaupt, wenn unter n Elementen p gleiche sind, so ist die Anzahl aller möglichen Versetzungen $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots p}$.

Befinden sich unter diesen wieder q andere gleiche Elemente, so entstehen wieder $1 \cdot 2 \ldots q$ mal weniger Versetzungen, und so auch $1 \cdot 2 \ldots r$ mal weniger, wenn noch andere r Elemente gleich sind, u. s. w. Die Anzahl aller möglichen Versetzungen bei n Elementen, worunter p gleiche einer Art, q gleiche einer anderen Art und r gleiche einer dritten Art sich befinden, ist also

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \ldots p \cdot 1 \ldots q \cdot 1 \cdot 2 \ldots r \cdot \ldots}$$

III.

Die geordneten Verbindungen

schliefsen alle Versetzungen aus, und unterscheiden sich durch eins oder mehrere verschiedene Elemente. Wir können sie entweder sämmtlich im Allgemeinen betrachten oder diejenigen Verbindungen besonders heraushe-ben, welche kein Element mehrmal enthalten. Letztere können wir

geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen

nennen Sie werden gebildet zu zweien, wenn jedes Element nicht mit sich und nur mit jedem folgenden verbunden wird

ab bc cd df
ac bd cf
ad bf
af

zu dreien, wenn die Verbindungen zu zweien ohne a mit a, jene ohne b mit b, jene ohne c mit c, ... verbunden werden

abc bcd cdf
abd bcf
abf bdf
acd
acf
adf

zu vieren nach demselben Gesetze

abcd bcdf
abcf
abdf
acdf

Vereinigen wir mit diesen geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen ihre Versetzungen wieder, so werden wir alle Verbindungen, welche durch diese Vereinigung hervorgebracht werden können, bilden.

zu zweien, wenn wir jedes Element mit allen früheren und späteren Elementen verbinden

a , b , c , d

a b	b a	c a	d a
a c	b c	c b	d b
a d	b d	c d	d c

Wenn n Elemente vorhanden sind, so werden also n — 1 Elemente mit a, eben so viele mit b, mit c, . . . verbunden; es entstehen daher n(n — 1) Verbindungen zu zweien,

zu dreien, wenn wir alle Verbindungen zu zweien, welche kein a enthalten, und deren Anzahl (n—1)(n—2) ist, mit a, jene, welche kein b enthalten und in gleicher Menge vorhanden sind, mit b, jene ohne c mit c, ... verbinden. Es werden also (n—1)(n—2) Elemente n mal verbunden, und die Anzahl aller Verbindungen zu dreien ist n(n — 1)(n—2).

a	bc	b	ac	c	ab	d	ab
	bd		ad		ad		ac
	cb		ca		ba		ba
	cd		cd		bd		bc
	db		da		da		ca
	dc		dc		db		cd

zu vieren. So wie die Verbindungen zu dreien aus jenen zu zweien entstanden sind, so entstehen auch die Verbindungen zu vieren aus jenen zu dreien; alle Verbindungen zu dreien, welche kein a enthalten, und deren Anzahl (n—1)(n — 2)(n—3) ist, werden mit a, jene ohne b mit b, ... verbunden, und es entstehen hier n(n—1)(n—2)(n—3) Verbindungen.

Das Bildungsgesetz dieser Verbindungen ist allgemein, und es entstehen aus n Elementen zu m Elementen

n(n—1)(n—2)(n— 3) . . . {n—(m— 1)} geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen aber mit Versetzungen.

Schliessen wir die Versetzungen von diesen Verbindungen wieder aus, und fragen blofs nach der Anzahl der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, so entstehen so vielmal weniger Verbindungen, als m Elemente versetzt werden können, und

$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{\ldots\{n-(m-1)\}}{}$ ist die Anzahl aller geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu m Elementen.

Die Anzahl der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen ist also

zu zweien $\frac{n(n-1)}{1.2}$, zu dreien $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$,

zu vieren $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$, ...

IV.

Wir kehren zu den geordneten Verbindungen im Allgemeinen wieder zurück, schliessen keine Verbindung aus, gestatten auch die Wiederholung eines und desselben Elements in derselben Verbindung und nennen sie im Gegensatze der vorigen die

geordneten Verbindungen mit Wiederholungen.

Sie werden gebildet

zu zweien, indem jedes Element mit sich und den folgenden Elementen und nie mit einem vorhergehenden Elemente verbunden wird.

a , b , c , d

a a b b c c d d
a b b c c d
a c b d
a d

Da jedes Element mit sich verbunden wird, so entstehen bei n Elementen eben so viele Verbindungen als geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen aus n+1 Elementen, also $\frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}$ Verbindungen.

zu dreien, wenn alle geordnete Verbindungen zu zweien mit Wiederholungen mit a, jene, welche kein a enthalten, mit b, jene ohne b mit c, jene ohne c mit d, ... verbunden werden

a	a a	b	b b	c	c c	d d d
	a b		b c		c d	
	a c		b d		d d	
	a d		c c			
	b b		c d			
	b c		d d			
	b d					
	c c					
	c d					
	d d					

Durch die Vergleichung mit dem Früheren finden wir, dafs hier bei n Elementen eben so viele Verbindungen entstehen, als bei geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus n+2 Elementen, also $\frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Schreiten wir so fort und fassen das Allgemeine in der Bildung dieser und der vorigen Verbindungen auf, so finden wir, dafs im Allgemeinen

$$\frac{n(n+1)(n+2) \ldots . \{n+(m-1)\}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \ldots m}$$

die Anzahl aller geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zu m Elementen ist.

V.

1) Beim Bilden der geordneten Verbindungen mit Wiederholungen wird immer das letzte, das vorletzte, und überhaupt jedes Element auf seiner Stelle so lange erhöhet, als möglich ist; so werden aus der ersten

Verbindung aaa durch Erhöhung des letzten Elements a die unmittelbar folgenden aab, aac, aad erzeugt, aus abb durch Erhöhen des letzten Elements die folgenden Verbindungen abc, abd, und so auch aus acc die folgende acd; eben so entspringen aus bbb die folgenden Verbindungen bbc; bbd, bcc, bcd, bdd, ccc, ccd, cdd, ddd.

Trennen wir bei diesen Verbindungen die Elemente in Fächer, und bestimmen jedem Elemente sein Fach, so, dafs a in die erste Abtheilung, b in die zweite, c in die dritte, und d in die vierte Abtheilung kommt, so ist die Anordnung folgende

A	B				C			
aaa	aaa				789			
aab	aa	b			78	9		
aac	aa		c		78		9	
aad	aa			d	78			9
abb	a	bb			7	89		
abc	a	b	c		7	8	9	
abd	a	b		d	7	8		9
acc	a		cc		7		89	
acd	a		c	d	7		8	9
add	a			dd	7			89
bbb		bbb				789		
bbc		bb	c			78	9	
bbd		bb		d		78		9
bcc		b	cc			7	89	
bcd		b	c	d		7	8	9
bdd		b		dd		7		89
ccc			ccc				789	
ccd			cc	d			78	9
cdd			c	dd			7	89
ddd				ddd				789

Das Zerfällen einer bestimmten Verbindung 789 aus drei verschiedenen Elementen in vier Abtheilungen fällt mit dem Bilden aller möglichen geordneten Verbindungen von vier Elementen zu dreien zusammen, denn das Erhöhen der Elemente bei dem Bilden der Verbindungen ist bei dem Zerfällen das Weiterrücken in die folgende Abtheilung

Sind also m Elemente, welche nicht ihre Ordnung verändern, in u Abtheilungen zu vertheilen, so ist die Anzahl aller möglichen Vertheilungen der Anzahl aller möglichen geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zu m Elementen gleich oder

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}\Big) \quad P$$

2) Die drei Elemente 789 geben 1 . 2 . 3 Versetzungen 789, 798, 879, 897, 978, 987, und jede dieser Verbindungen kann eben so oft als die erste Verbindung 789 in die vier Fächer vertheilt werden. Die Zahl $\frac{4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}$, welche die Anzahl der Vertheilungen für die erste Verbindung 789 ist, mufs also noch mit der Versetzungszahl 1.2.3 vervielfacht werden.

Sind also m verschiedene Elemente in n Fächer auf alle mögliche Arten zu vertheilen, so ist die Anzahl aller Vertheilungen

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m} \times 1.2.3\ldots m = n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$$

3) Sind unter den m Elementen p Elemente gleich, so mufs aus denselben Gründen die Zahl P mit der Versetzungszahl $\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}{1\,.\,2\ldots p}$ vervielfacht werden, und wenn noch q andere Elemente gleich sind, mit $\frac{1\,.\,2\ldots m}{1\,.\,2\ldots p\,.\,1\,.\,2\ldots q}$, u. s. w.

Wenn also m Elemente, worunter p, q, r, ... gleich sind, in n Fächer auf alle mögliche Arten zu vertheilen sind, so dafs in allen Abtheilungen zugleich alle m Elemente sich befinden, so geschieht dies auf

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots m} \times \frac{1\,.\,2\ldots m}{1\,.\,2\ldots p\,.\,1\,.\,2\ldots q\,.\,1\,.\,2\ldots r\ldots} =$$

$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots p\,.\,1\,.\,2\ldots q\,.\,1\,.\,2\ldots r\ldots} \text{ Arten.}$$

VI.

In der ersten Abhandlung werden

1) alle mögliche Verbindungen aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ zu m Elementen durch $\overset{m}{C}$

2) alle geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zu m Elementen durch $\overset{m}{C}'$

3) alle geordnete Verbindungen mit Wiederholungen zu m Elementen durch $'\overset{m}{C}$.

4) das Product, oder die Versetzungszahl, 1 . 2 . 3 . 4 . . . n durch $1^{n|1}$ vorgestellt.

Die übrigen Bezeichnungen sind an den geeigneten Orten erklärt. — Das Zeichen für die doppelten Verbindungen ohne Wiederholungen findet sich in §. 2. Für die zweifach und sogar vierfach in einander verwebten geordneten Verbindungen mit und ohne Wiederholungen, welche in der neunten Abhandlung vorkommen, habe ich noch keine Zeichen festgesetzt. In der sechsten Abhandlung habe ich für die geordneten Verbindungen andere Zeichen gewählt, weil mir diese zweckmässiger schienen, um die fehlenden Elemente anzugeben. — Die Stellenzahlen über den Elementen nehmen beim Drucke viel Raum ein, und erschweren dem Setzer das Geschäft sehr; ich habe deswegen im weitern Verfolge die Stellenzahlen unten an das Element gehängt.

Anmerkung. Während des Drucks dieses Werks ist „Theorie der combinatorischen Integrale von H. A. Rothe, Nürnberg 1820, 4.“ erschienen; ich habe es zu spät erhalten, als dafs ich solches hätte benutzen können, und mufs deshalb, da das Werk viel Wichtiges, was hierher gehört, enthalten mufs (selbst habe ich es noch nicht gelesen), den Leser darauf verweisen.

ERSTE ABHANDLUNG.

Vervielfachen.

§. 1.

Das Vervielfachen der Faktoren, welche aus mehreren Elementen zusammengesetzt sind, besteht im Verbinden aller Elemente des zweiten mit allen Elementen des ersten Faktors, und im Verbinden aller Elemente des folgenden Faktors mit allen Produkten, welche durch die vorhergehenden Faktoren erzeugt sind. Um dieses Geschäft mit Sicherheit und Leichtigkeit zu vollführen, mufs in ibm eine bestimmte Ordnung befolgt werden: es darf nie ein späteres Element zu den durch die vorhergehenden Faktoren gebildeten Verbindungen treten, bevor nicht die früheren Elemente ihnen zugesellt sind. So wird, wenn $x + a$ der erste, und $x + b$ der zweite Faktor ist, mit den Elementen x und a zuerst x und dann b verbunden:

x x

a x

x b

a b

Kommt ein dritter Faktor $x + c$ hinzu, so wird den eben gebildeten Verbindungen zuerst x und dann c zugesellt, und wie vorhin ihnen nachgesetzt:

x x x
a x x
x b x
a b x
x x c
a x c
x b c
a b c

Der Zutritt eines vierten und jedes folgenden Faktors ändert nichts in der einmal festgesetzten Ordnung. Um aber diese Verbindungen leichter übersehen zu können, mufs vorerst die Hauptgrösse x von den übrigen Elementen getrennt werden:

x x	
a	x
b	
a b	
a b	x
a c	
b c	
a b c	

x x x	
a	x x
b	
c	

Bei dieser Trennung bemerken wir die Vortheile, welche unser obiges Verfahren darbietet. Wir finden gleich, dafs, da wir immer ein späteres Element zu allen früheren geselliet haben, alle geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen gebildet sind. In einigen Verbindungen mufste x nur einmal, in andern zwei- und mehrmal vorkommen. In einer Verbindung tritt es allein auf, nämlich x^n, wenn n Elemente vorhanden sind, in andern einmal weniger und x^{n-1} gesellt sich zu den einzelnen Elementen a, b, c, ... in andern kommt x^{n-2} mit den geordneten Verbindungen zu zweien ohne Wiederholungen vor, und so verliert sich allmälig x aus den Verbindungen, bis zuletzt eine Vrrbindung, worin alle Elemente a, b, c, . . . sich befinden, die ganze Reihe beschliefst. Es ist daher

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots = x^n + \overset{1}{C}' x^{n-1} + \overset{2}{C}' x^{n-2} + \ldots + \overset{n-1}{C}' x^1 + \overset{n}{C}'$$

$$(a, b, c, \ldots\ldots : \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

oder wenn wir andere Zeichen für die Elemente einführen,

$$1)\quad (x+\overset{1}{a})(x+\overset{2}{a})(x+\overset{3}{a})\ldots\ldots(x+\overset{n}{a}) = x^n + \overset{1}{C}' x^{n-1} + \overset{2}{C}' x^{n-2} + \ldots + \overset{n-1}{C}' x^1 + \overset{n}{C}'$$

$$(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a},\ \ldots\ldots\ \overset{n}{a})$$

Sind die Elemente gleich, so wird x^{n-1} mit so vielen a verbunden, als Faktoren vorhanden sind, nämlich mit n a; x^{n-2} so oft mit a^2, als geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zu zweien aus n Elementen gebildet werden können, nämlich $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$mal; und überhaupt x^{n-p} mit a^p so oft, als geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu p Elementen mëglich sind, also $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots p}$mal. Wählen wir für diese Anzahl ein besonderes Zeichen $^{p}_{n}\mathfrak{A}$, bei welchem n der erste Faktor und p die Menge der Faktoren bedeutet, so können wir die Produkte, welche durch das n malige Vervielfachen von x+a entstehen, auf folgende Art angeben:

$$2)\quad (x+a)^n = x^n + {}^{1}_{n}\mathfrak{A}\, x^{n-1} a^1 + {}^{2}_{n}\mathfrak{A}\, x^{n-2} a^2 + \ldots\ldots + {}^{p}_{n}\mathfrak{A}\, x^{n-p} a^p + \ldots + {}^{n}_{n}\mathfrak{A}\, x^0 a^{n-1} + a^n$$

§. 2.

Wir haben mit dem einfachsten Falle die Untersuchung begonnen. Es ist jetzt leicht von ihm zu den zusammengesetzteren Fällen überzugehen, wo die Elemente sämmtlich verschieden sind. Sind nämlich die Faktoren

$$(\overset{1}{a} + \overset{1}{b})\ (\overset{2}{a} + \overset{2}{b})\ (\overset{3}{a} + \overset{3}{b})\ \ldots\ldots$$

so bestehen die einzelnen Produkte, welche durch das Vervielfachen hervorgebracht werden, in allen möglichen Verbindungen zu zweien, zu dreien, ... der Elemente a und b, versehen mit den Stellenzahlen 1, 2, 3, 4, ..., nämlich

a	b
1 2 a a	1 2 a b
1 2 b a	1 2 b b

1 2 3 a a a	1 2 3 a b a
1 2 3 b a a	1 2 3 b b a
1 2 3 a a b	1 2 3 a b b
1 2 3 b a b	1 2 3 b b b

u. s. w.

Wir gruppiren die a und die b in den Verbindungen zusammen:

1 2 a a	1 2 3 a a a	1 2 3 4 a a a a
1 2 a b	1 2 3 a a b	1 2 3 4 a a a b
2 1 a b	1 3 2 a a b	1 2 4 3 a a a b
2 1 b b	2 3 1 a a b	1 3 4 2 a a a b
	1 3 2 a b b	2 3 4 1 a a a b
	2 3 1 a b b	1 2 4 3 a a b b
	3 2 1 a b b	1 3 4 2 a a b b
	3 2 1 b b b	1 4 3 2 a a b b
		2 3 4 1 a a b b
		2 4 3 1 a a b b
		3 4 2 1 a a b b
		1 4 3 2 a b b b
		2 4 3 1 a b b b
		3 4 2 1 a b b b
		4 3 2 1 a b b b
		4 3 2 1 b b b b

Es kann nur eine Verbindung vorkommen, welche nur a und kein b enthält; hierauf folgen Verbindungen, welche ein a weniger und statt seiner ein b enthalten; und überhaupt, so wie ein a aus den Verbindungen tritt, nimmt b seinen Platz ein. Das Gesetz, welches hierbei die Stellenzahlen befolgen, ist zusammengesetzt. Da in keiner Verbindung eine Stellenzahl zwei- oder mehrmal vorkommen kann, so können sowohl die a als die b jede für sich allein nur geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen bilden, z. B.

$\overset{1}{a}\ \overset{2}{a}\ \overset{3}{a}\ b\ b$	oder	1 2 3 5 4
$\overset{1}{a}\ \overset{2}{a}\ \overset{4}{a}\ \overset{5}{b}\ \overset{3}{b}$		1 2 4 5 3
$\overset{1}{a}\ \overset{2}{a}\ \overset{5}{a}\ \overset{4}{b}\ \overset{3}{b}$		1 2 5 4 3
$\overset{1}{a}\ \overset{3}{a}\ \overset{4}{a}\ \overset{5}{b}\ \overset{2}{b}$		1 3 4 5 2
$\overset{1}{a}\ \overset{3}{a}\ \overset{5}{a}\ \overset{4}{b}\ \overset{2}{b}$		1 3 5 4 2
$\overset{1}{a}\ \overset{4}{a}\ \overset{5}{a}\ \overset{3}{b}\ \overset{2}{b}$		1 4 5 3 2
$\overset{2}{a}\ \overset{3}{a}\ \overset{4}{a}\ \overset{5}{b}\ \overset{1}{b}$		2 3 4 5 1
$\overset{2}{a}\ \overset{3}{a}\ \overset{5}{a}\ \overset{4}{b}\ \overset{1}{b}$		2 3 5 4 1
$\overset{2}{a}\ \overset{4}{a}\ \overset{5}{a}\ \overset{3}{b}\ \overset{1}{b}$		2 4 5 3 1
$\overset{3}{a}\ \overset{4}{a}\ \overset{5}{a}\ \overset{2}{b}\ \overset{1}{b}$		3 4 5 2 1
		a a a b b

Stellen wir diese sämmtlichen Verbindungen durch das Zeichen

$$\overset{3,2}{C'}$$

$$(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a},\ \overset{4}{a},\ \overset{5}{a},\ \overset{1}{b},\ \overset{2}{b},\ \overset{3}{b},\ \overset{4}{b},\ \overset{5}{b},)$$

vor, so ist

$$(\overset{1}{a} + \overset{1}{b})\ (\overset{2}{a} + \overset{2}{b}) = \begin{matrix}1\ 2\\ a\ a\end{matrix} + \begin{matrix}1\ 2\\ 2\ 1\\ a\ b\end{matrix} + \begin{matrix}1\ 2\\ b\ b\end{matrix} = \overset{2,0}{C'} + \overset{1,1}{C'} + \overset{0,2}{C'}$$

$$(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{1}{b},\ \overset{2}{b})$$

$$(\overset{1}{a} + \overset{1}{b})\ (\overset{2}{a} + \overset{2}{b})\ (\overset{3}{a} + \overset{3}{b}) = \begin{matrix}1\ 2\ 3\\ a\ a\ a\end{matrix} + \begin{matrix}1\ 2\ 3\\ 1\ 3\ 2\\ 2\ 3\ 1\\ a\ a\ b\end{matrix} + \begin{matrix}1\ 3\ 2\\ 2\ 3\ 1\\ 3\ 2\ 1\\ a\ b\ b\end{matrix} + \begin{matrix}3\ 2\ 1\\ b\ b\ b\end{matrix}$$

$$= {}^{3,0}C' + {}^{2,1}C' + {}^{1,2}C' + {}^{0,3}C'$$
$$({}^{1}a, {}^{2}a, {}^{3}a, {}^{1}b, {}^{2}b, {}^{3}b)$$

$$({}^{1}a + {}^{1}b)\,({}^{2}a + {}^{2}b)\,({}^{3}a + {}^{3}b)\,({}^{4}a + {}^{4}b) = 1234 + 1234 + 1243 + 1432 + 4321$$
aaaa 1243 1342 2431 bbbb
1342 1432 3421
2341 2341 4321
aaab 2431 abbb
3421
aabb

$$= {}^{4,0}C' + {}^{3,1}C' + {}^{2,2}C' + {}^{1,3}C' + {}^{0,4}C'$$
$$({}^{1}a, {}^{2}a, {}^{3}a, {}^{4}a, {}^{1}b, {}^{2}b, {}^{3}b, {}^{4}b)$$

und allgemein

3) $$({}^{1}a + {}^{1}b)\,({}^{2}a + {}^{2}b) \ldots\ldots ({}^{n}a + {}^{n}b) = {}^{n,0}C' + {}^{n-1,1}C' + {}^{n-2,2}C' + \ldots + {}^{n-p,p}C' + \ldots + {}^{0,n}C'$$
$$({}^{1}a, {}^{2}a, {}^{3}a, \ldots {}^{n}a, {}^{1}b, {}^{2}b, {}^{3}b, \ldots {}^{n}b)$$

§. 3

Bestehen die Faktoren aus mehreren Elementen, so müssen wir vor allem zuerst auf eine zweckmässige Bezeichnung dieser Elemente denken, welche bei so weitläufigen Geschäften Bestimmtheit, Einfachheit und Leichtigkeit im Schreiben mit einander verbindet. Da diese Zeichen zwei Merkmale angeben müssen, nâmlich in welchem Faktor sich das Element befindet, und zugleich welchen Platz das Element im Faktor einnimmt, so wählen wir zur Unterscheidung der Faktoren die Buchstaben

a, b, c, d, ...

als Grundzeichen für die verschiedenen Faktoren, und versehen diese Buchstaben zum Unterschiede der Elemente eines Faktors mit Stellenzahlen

$$({}^{1}a + {}^{2}a + {}^{3}a + {}^{4}a + \ldots) \times ({}^{1}b + {}^{2}b + {}^{3}b + {}^{4}b + \ldots) \times ({}^{1}c + {}^{2}c + {}^{3}c + {}^{4}c + \ldots) \times \ldots$$

Das Geschäft selbst besteht darin, dafs jedes Element der zweiten Reihe mit allen Elementen der ersten verbunden und zu diesen Verbindungen die Elemente der dritten Reihe nach ihrer Folge gesellet werden, ... Nehmen wir an, um ein Beispiel aufstellen zu können, dafs die Reihen nur aus dreien Elementen bestehen, so sind die einzelnen Produkte folgende:

1 1 a b	1 1 1 a b c	1 1 2 a b c	1 1 3 a b c
2 1 a b	2 1 1 a b c	2 1 2 a b c	2 1 3 a b c
3 1 a b	3 1 1 a b c	3 1 2 a b c	3 1 3 a b c
1 2 a b	1 2 1 a b c	1 2 2 a b c	1 2 3 a b c
2 2 a b	2 2 1 a b c	2 2 2 a b c	2 2 3 a b c
3 2 a b	3 2 1 a b c	3 2 2 a b c	3 2 3 a b c
1 3 a b	1 3 1 a b c	1 3 2 a b c	1 3 3 a b c
2 3 a b	2 3 1 a b c	2 3 2 a b c	2 3 3 a b c
3 3 a b	3 3 1 a b c	3 3 2 a b c	3 3 3 a b c

oder

1 1	1 1 1	1 1 2	1 1 3
2 1	2 1 1	2 1 2	2 1 3
3 1	3 1 1	3 1 2	3 1 3
1 2	1 2 1	1 2 2	1 2 3
2 2	2 2 1	2 2 2	2 2 3
3 2	3 2 1	3 2 2	3 2 3
1 3	1 3 1	1 3 2	1 3 3
2 3	2 3 1	2 3 2	2 3 3
3 3	3 3 1	3 3 2	3 3 3
a b	a b c	a b c	a b c

Bei dieser Bildung der Produkte werden alle mögliche Verbindungen der Stellenzahlen, nicht allein die geordneten Verbindungen, sondern auch ihre Versetzungen erzeugt. Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Summe der Stellenzahlen, so finden wir gleich, dafs die Summe der Stellenzahlen der ersten Verbindung die kleinste und die Anzahl der Faktoren selbst nämlich n ist; so wie ein späteres Element ein früheres ersetzt, wächst diese Summe um 1. Diese Bemerkung giebt zu einer neuen Anordnung nach den um 1 fortschreitenden Summen der Stellenzahlen Veranlassung. Behalten wir das gewählte Beispiel bei, so gruppiren sich obige Verbindungen auf folgende Art:

3	4	5	6	7	8	9
1 1 1	1 1 2	1 1 3	1 2 3	1 3 3	2 3 3	3 3 3
a b c	1 2 1	1 2 2	1 3 2	2 2 3	3 2 3	a b c
	2 1 1	1 3 1	2 1 3	2 3 2	3 3 2	
	a b c	2 1 2	2 2 2	3 1 3	a b c	
		2 2 1	2 3 1	3 2 2		
		3 1 1	3 1 2	3 3 1		
		a b c	3 2 1	a b c		
			a b c			

welche wegen ihrer Einfachheit eine besondere Bezeichnung verdient; wir wählen folgende:

$$ {}^{3}\overset{3}{C} + {}^{4}\overset{3}{C} + {}^{5}\overset{3}{C} + {}^{6}\overset{3}{C} + {}^{7}\overset{3}{C} + {}^{8}\overset{3}{C} + {}^{9}\overset{3}{C} $$

$$ (\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \overset{3}{b}, \overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \overset{3}{c}) $$

Der Buchstabe $\overset{3}{C}$ bedeutet nämlich alle mögliche Verbindungen zu dreien aus den untergesetzten Elementen und die Zahl zur Linken des C die Summe der Stellenzahlen jeder Verbindung.

Durch diese Bezeichnung sind wir im Stande, die oben ausgesprochene Wahrheit in wenigen Zeichen darzustellen:

$$ 4) \quad (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots)(\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \ldots)(\overset{1}{c} + \overset{2}{c} + \ldots)\ldots $$

$$ = {}^{n}\overset{n}{C} + {}^{n+1}\overset{n}{C} + {}^{n+2}\overset{n}{C} + {}^{n+3}\overset{n}{C} + \ldots\ldots $$

$$ (\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \ldots \overset{1}{c}, \overset{2}{c} \ldots) $$

Diese Anordnuug nach den Summen der Stellenzahlen erhält dann erst ihre vorzügliche Anwendung und Wichtigkeit, wenn die Glieder der Reihen, welche vervielfacht werden sollen, mit den Potenzen einer Grundgrösse verbunden sind, nämlich

$$ (\overset{1}{a}x^{1} + \overset{2}{a}x^{2} + \overset{3}{a}x^{3} + \ldots)(\overset{1}{b}x^{1} + \overset{2}{b}x^{2} + \overset{3}{b}x^{3} + \ldots)(\ldots $$

denn die Stellenzahl jedes Gliedes zeigt hierbei zugleich an, wie viel Faktoren x das Glied in die Verbindung bringt; diejenigen Verbindungen, welche eine gleiche Summe der Stellenzahlen haben, sind daher auch von einer

gleichen Anzahl Faktoren x begleitet, und vereinigen sich sämmtlich zu einem Gliede in der Hauptreihe. Die Zeichen für eine solche Anordnung werden daher folgende seyn:

$$5)\quad (\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots)(\overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \ldots)(\overset{1}{c}x^1 + \overset{2}{c}x^2 + \ldots)(\ldots$$
$$= {}^{n}\overset{n}{C}x^n + {}^{n+1}\overset{n}{C}x^{n+1} + {}^{n+2}\overset{n}{C}x^{n+2} + \ldots.$$
$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \ldots \overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \ldots)$$

Sind die Reihen, welche als Faktoren auftreten, gleich, so kann das Geschäft dadurch bedeutend abgekürzt werden, dafs, da alle Versetzungen derselben Elemente gleiche Produkte geben, nur die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen zu gleichen Summen gebildet, und die einzelnen Verbindungen mit den zugehörigen Versetzungszahlen versehen werden, z. B.

$$(\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3)^3 = \tfrac{1,2.3}{1.2.3}\cdot \overset{111}{a}aax^3 + \tfrac{1,2.3}{1,2}\cdot \overset{112}{a}aax^4$$
$$+ \tfrac{1.2,3}{1.2}\cdot \overset{113}{a}aax^5 + 1.2.3\cdot \overset{123}{a}aax^6 + \tfrac{1.2.3}{1.2}\cdot \overset{133}{a}aax^7 + \tfrac{1.2.3}{1.2}\cdot \overset{233}{a}aax^8 + \tfrac{1.2.3}{1.2.3}\cdot \overset{333}{a}aax^9$$
$$\tfrac{1.2.3}{1.2}\cdot \overset{122}{a}aa \quad \tfrac{1.2.3}{1.2.3}\cdot \overset{222}{a}aa \quad \tfrac{1.2.3}{1.2}\cdot \overset{223}{a}aa$$

Es ist nicht nöthig, diese Erleichterung, welche die Gleichheit der Faktoren gestattet, durch besondere Zeichen anzudeuten; es bleibe dem Rechner die Wahl, entweder alle Verbindungen mit ihren Versetzungen oder nur die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen und mit der Versetzungszahl verbunden zu bilden. Für die Bildungsweise des ganzen Produkts genügen daher folgende Zeichen:

$$6)\quad (\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \overset{4}{a}x^4 + \ldots.)^n =$$
$$= {}^{n}\overset{n}{C}x^n + {}^{n+1}\overset{n}{C}x^{n+1} + {}^{n+2}\overset{n}{C}x^{n+2} + \ldots + {}^{n+m}\overset{n}{C}x^{n+m} \ldots.$$
$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \ldots)$$

§. 4.

Die Vorzahl von x^{n+m}, vorgestellt durch ${}^{n+m}\overset{n}{C}_{(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots)}$, besteht also aus

allen möglichen Verbindungen der Elemente $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$ zu n Elementen zur Summe $n+m$. Jede von diesen Verbindungen kann vorgestellt werden durch

$$(\overset{1}{a})^p (\overset{2}{a})^q (\overset{3}{a})^r \ldots\ldots (\overset{m+1}{a})^v$$

und diese Verbindung kommt so oft vor, als ihre Elemente versetzt werden können, nämlich

$$\frac{1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r\ldots..1.2\ldots.v} = \frac{1^{n!1}}{1^{p!1}.1^{q!1}.1^{r!1}\ldots.1^{v!1}}$$

mal, wobei die Zahlen p, q, r, ... v folgenden Gesetzen unterworfen sind

$$p+q+r+\ldots.+v=n$$

$$1p+2q+3r+\ldots..+(m+1)v=n+m$$

und, wenn beide vereint werden,

$$1q+2r+3s+\ldots.+mv=m$$

Die Bildungsweise der Vorzahl von x^{n+m} können wir also statt durch ${}^{n+m}\overset{n}{C}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}..)$, jetzt durch $S(\overset{1}{a})^p (\overset{2}{a})^q \ldots. (\overset{m+1}{a})^v . \frac{1^{n!1}}{1^{p!1}.1^{q!1}\ldots 1^{v!1}}$ bemerkbar machen, wo S die Summe aller möglichen Verbindungen bedeutet, welche entstehen, wenn p, q, r, ... v alle Werthe erhalten, die unter den erwähnten Bedingungen für sie möglich sind.

Das Bildungsgeschäft wird bei späteren Gliedern weitläufig und mühsam; eine bestimmte Ordnung in ihm gewährt nicht allein Erleichterung, sondern auch Sicherheit, dafs alle Verbindungen gebildet werden; wir wählen hier die Ordnung nach dem Anfangselemente $\overset{1}{a}$, und zerlegen deshalb die obige allgemeine Form in zwei Theile,

$$\text{in } (\overset{1}{a})^p . \frac{n(n-1)\ldots.(p+1)}{1.2\ldots.(n-p)} \text{ und in } (\overset{2}{a})^q (\overset{3}{a})^r \ldots. (\overset{m+1}{a})^v . \frac{1.2\ldots.(n-p)}{1^{q!1}.1^{r!1}\ldots.1^{v!1}}$$

Der erste Theil enthält das erste Element $\overset{1}{a}$ und ausser n noch die Zahl p. Während p unverändert bleibt, nehmen q, r, s, ... v alle mögliche Werthe an, welche die Gleichungen

$$q+r+s+\ldots\ldots+v=n-p$$

$$2q+3r+4s+\ldots..+(m+1)v=n+m-p$$

oder

$$^{1}q + {}^{2}r + 3s + \ldots + mv = m$$

zulassen. Der erste Theil wird also mit allen Verbindungen vervielfacht, welche aus den Elementen $\overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots \overset{m+1}{a}$ zu n — p Elementen zur Summe n + m — p gebildet werden können, oder in Zeichen

$$(\overset{1}{a})^{p} \cdot {}^{n-p}\mathfrak{A} \cdot S(\overset{2}{a})^{q}(\overset{3}{a})^{r} \ldots (\overset{m+1}{a})^{v} \cdot \frac{1^{n-p1_1}}{1^{q1_1} \cdot 1^{r1_1} \cdot \ldots 1^{v1_1}} \text{ oder } (\overset{1}{a})^{p} \cdot {}^{n-p}\mathfrak{A} \cdot {}^{n+m-p}_{(\overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots)}C$$

Wir erhalten also alle mögliche Verbindungen, welche unter ${}^{n+m}_{(\overset{2}{a}, a, \ldots)}C^{n}$ begriffen sind, wenn wir dem p im vorstehenden Ausdrucke alle mögliche Werthe von n bis n — m geben, nämlich

$$7) \quad {}^{n+m}_{(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots)}C^{n} = {}^{n}\mathfrak{A}^{\circ}(\overset{1}{a})^{n} \cdot {}^{m}C^{\circ} + {}^{n}\mathfrak{A}^{1}(\overset{1}{a})^{n-1} \cdot {}^{m+1}C^{1} + {}^{n}\mathfrak{A}^{2}(\overset{1}{a})^{n-2} \cdot {}^{m+2}C^{2} + \ldots$$
$$\ldots + {}^{n}\mathfrak{A}^{m}(\overset{1}{a})^{n-m} \, {}^{m+m}C^{m}$$

§. 5.

Vorstehende Zeichen geben keine neue Bildungsweise der Glieder an, sie bedeuten nur, dafs die Verbindungen der Elemente $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$, woraus die Vorzahl von x^{n+m} besteht, nach den Potenzen des Anfangselements $\overset{1}{a}$ geordnet werden können, z. B. ist n = 4 und m = 8, so ist

$$^{12}_{(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots)}C^{4} = {}^{4}\mathfrak{A}^{\circ}(\overset{1}{a})^{4} \cdot {}^{8}C^{\circ} + {}^{4}\mathfrak{A}^{1}(\overset{1}{a})^{3} \cdot {}^{9}C^{1} + {}^{4}\mathfrak{A}^{2}(\overset{1}{a})^{2} \cdot {}^{10}C^{2} + {}^{4}\mathfrak{A}^{3}(\overset{1}{a})^{1} \cdot {}^{11}C^{3}$$
$$+ {}^{4}\mathfrak{A}^{4}(\overset{1}{a})^{0} \, {}^{12}C^{4}$$
$$(\overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \ldots)$$

$$= \frac{4}{1}\cdot\overset{1}{(a)}^{3}\cdot\overset{9}{a} + \frac{4\cdot 3}{1,2}\overset{1}{(a)}^{2} \left| \begin{array}{l} \overset{28}{1.2.aa} + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1,2\cdot 3}\cdot\overset{1}{(a)}^{1} \\ \overset{37}{1.2.aa} \\ \overset{46}{1.2.aa} \\ \overset{55}{1.2.aa} \end{array} \right| \begin{array}{l} \overset{227}{3.aaa} \\ \overset{236}{6.aaa} \\ \overset{245}{6.aaa} \\ \overset{335}{3.aaa} \\ \overset{344}{3.aaa} \end{array}$$

$$+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\overset{1}{(a)}^{0} \left| \begin{array}{l} \overset{2226}{4.aaaa} \\ \overset{2235}{12.aaaa} \\ \overset{2244}{6.aaaa} \\ \overset{2334}{12.aaaa} \\ \overset{3333}{aaaa} \end{array} \right.$$

Die Gleichung 7 gewinnen wir auch auf einem andern Wege, der von dem vorhergehenden ganz verschieden ist; setzen wir nämlich das Binomium voraus,

$$(\overset{1}{a}x+z)^{n} = \overset{1}{(a)}^{n}x^{n} + {}^{n}\mathfrak{A}\overset{1}{(a)}^{n-1}x^{n-1}z^{1} + {}^{n}\mathfrak{A}\overset{1}{(a)}^{n-2}x^{n-2}z^{2}$$

$$+{}^{n}\mathfrak{A}\overset{1}{(a)}^{n-3}x^{n-3}z^{3} + \ldots\ldots$$

$$\text{und } z = \overset{2}{a}x^{2} + \overset{3}{a}x^{3} + \overset{4}{a}x^{4} + \overset{5}{a}x^{5} + \ldots\ldots$$

$$\text{also } z^{p} = {}^{2p}\overset{p}{C}x^{2p} + {}^{2p+1}\overset{p}{C}x^{2p+1} + {}^{2p+2}\overset{p}{C}x^{2p+2} + {}^{2p+3}\overset{p}{C}x^{2p+3} + \ldots$$

$$(\overset{2}{a}, \quad \overset{3}{a}, \quad \overset{4}{a}, \quad \ldots\ldots)$$

so erhalten wir durch Einführung der verschiedenen Potenzen von z das Polynomium

$$(\overset{1}{a}x^{1} + \overset{2}{a}x^{2} + \overset{3}{a}x^{3} + \ldots\ldots)^{n} =$$

$$= (\overset{1}{a})^n x^n + {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-1}\,{}^2\overset{1}{C}x^{n+1} + {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-1}\,{}^3\overset{1}{C}x^{n+2} + {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-1}\,{}^4\overset{1}{C}x^{n+3} +$$

$$+ {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-2}\,{}^4\overset{2}{C} \qquad + {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-2}\,{}^5\overset{2}{C}$$

$$+ {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-3}\,{}^6\overset{3}{C}$$

$$+ {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-1}\,{}^5\overset{1}{C}x^{n+4} + \ldots\ldots$$

$$+ {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-2}\,{}^6\overset{2}{C}$$

$$+ {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-3}\,{}^7\overset{3}{C}$$

$$+ {}^n\mathfrak{A}\,(\overset{1}{a})^{n-4}\,{}^8\overset{4}{C}$$

$$(\overset{2}{a}\ ,\quad \overset{3}{a}\ ,\quad \overset{4}{a}\ ,\quad \ldots\ldots)$$

Dieses Verfahren ist darin von dem vorigen verschieden, dafs letzteres eine schon bekannte Entwicklung voraussetzt, da hingegen ersteres sich an die Natur der zu bildenden Verbindungen hält. Beide Wege führen zur Wahrheit, sie sind aber nicht immer gleich klar und bequem, nicht immer so getrennt, wie in diesem Falle, denn oft lenkt der eine in den andern ein.

§. 6.

Das Bilden der Glieder der Reihe bleibt immer mühsam, wenn entfernte Glieder gesucht werden, oder wenn selbst die Elemente $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots$ zusammengesetzte Grössen sind, das ist, wenn diese Elemente erst selbst aus andern Elementen gebildet werden sollen. Die Mittel, dieses weitläufige und oft beschwerliche Geschäft zu erleichtern, bestehen im Allgemeinen darin, dafs frühere schon vollendete Arbeiten zu späteren Geschäften benutzt werden. Dieses Zurückführen späterer Geschäfte auf frühere Arbeiten nennen wir im Allgemeinen rücklaufende Bildungsweise, und im Gegensatze von dieser nennen wir diejenige, welche wir in den §en 4 und 5 kennen gelernt haben, unabhängige Bildungsweise.

Bevor wir aber zu dieser zurücklaufenden Bildung übergehen, wollen wir eine allgemeine Bezeichnung einführen, welche sowohl für die unabhän-

gige als zurücklaufende Bildungsweise und auch für jede andere, die noch aufgefunden werden mag, statt finden kann, und die mit einer frühern Bezeichnung für das Binomium, welches doch nur ein besonderer Fall des allgemeinen Polynomiums ist, in Verbindung steht. Wir haben nämlich bei dem Produkte $(x + a)^n$ das Zeichen $^{p}_{\mathfrak{A}}$ eingeführt, wo n zur Linken des $\mathfrak{A}$ die Anzahl der Faktoren des Produkts $(x + a)^n$ und p über $\mathfrak{A}$ die Stellenzahl des Gliedes in der entwickelten Reihe bedeutet. Der deutsche Buchstabe $\mathfrak{A}$ mag bei dem Produkte statt finden, dessen Faktoren nur aus zweien Elementen, und der lateinische A bei dem Produkte, dessen Faktoren aus unbestimmt vielen Elementen bestehen, so dafs

$$(\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots)^n = {}^n\overset{0}{A}x^n + {}^n\overset{1}{A}x^{n+1} + {}^n\overset{2}{A}x^{n+2} + \ldots\ldots + {}^n\overset{m}{A}x^{n+m} \ldots\ldots$$

Bei dieser Reihe vertritt also ${}^n\overset{m}{A}_{(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots)}$ die Stelle von ${}^{n+m}\overset{n}{C}_{(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots)}$, und der Unterschied dieser beiden Zeichen ist, dafs ${}^n\overset{m}{A}$ das $(m + 1)$te Glied überhaupt, gleichviel, wie es gebildet wird, hingegen ${}^{n+m}\overset{n}{C}$ die Art, wie das $(m + 1)$te Glied gebildet wird, und zwar die unabhängige Bildung anzeigt.

Indem wir jetzt die rücklaufende Bildung des Produkts

$$(\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots)^n = P^n$$

selbst aufsuchen, und zwar in so fern die Glieder der früheren Produkte zu den Gliedern der späteren Produkte benutzt werden sollen, finden wir beim Uebergange von P^n zu dem nächst höhern P^{n+1}, dafs sich in dem Produkte

$$({}^n\overset{0}{A}x^n + {}^n\overset{1}{A}x^{n+1} + {}^n\overset{2}{A}x^{n+2} + \ldots)\,(\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots)$$
$$= {}^{n+1}\overset{0}{A}x^{n+1} + {}^{n+1}\overset{1}{A}x^{n+2} + {}^{n+1}\overset{2}{A}x^{n+3} \ldots\ldots$$

nur diejenigen Verbindungen der Vorzahlen A und a zu einem und demselben Gliede vereinigen, deren Stellenzahlen dieselbe Summe geben, und dafs also

8) $$ {}^{n+1}\overset{m}{A} = {}^{n}\overset{m\ 1}{A}\,a + {}^{n}\overset{m-1\ 2}{A}\,a + {}^{n}\overset{m-2\ 3}{A}\,a + \ldots + {}^{n}\overset{0\ m+1}{A}\,a $$
$$ (\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a},\ \overset{+}{a},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) $$

Eben so finden wir, wenn wir das Produkt P^n aus den beiden niedrigern Produkten P^q und P^{n-q} zusammensetzen

$$ (\overset{0}{{}^{q}A}x^q + \overset{1}{{}^{q}A}x^{q+1} + \overset{2}{{}^{q}A}x^{q+2} + \ldots\ldots)(\overset{0}{{}^{n-q}A}x^{n-q} + \overset{1}{{}^{n-q}A}x^{n-q+1} + \overset{2}{{}^{n-q}A}x^{n-q+2} + \ldots\ldots) $$

daſs, da sich nur jene Verbindungen zu einem Gliede der Hauptreihe gruppiren, deren Stellenzahlen dieselbe Summe geben, das $(m+1)$te Glied der Hauptreihe aus folgenden Gliedern der beiden niedern Reihen gebildet wird

9) $$ {}^{n}\overset{m}{A} = {}^{q}\overset{m}{A}{}^{n-q}\overset{0}{A} + {}^{q}\overset{m-1}{A}{}^{n-q}\overset{1}{A} + {}^{q}\overset{m-2}{A}{}^{n-q}\overset{2}{A} + \ldots\ldots + {}^{q}\overset{0}{A}{}^{n-q}\overset{m}{A} $$

Es ist nicht schwer, diese Bildung der Glieder der höhern Potenzen aus den Gliedern der niedern Potenzen in der Verbindung der Elemente selbst nachzuweisen. Wir wollen hier wegen grösserer Klarheit von etwas Bestimmtem reden, oder allgemeine Gründe an einen einzelnen Fall heften, und wählen hierzu das dritte Glied von P^5, dessen sämmtliche Verbindungen folgende sind:

$$ {}^{5}\overset{2}{A} = {}^{7}\overset{5}{C} = $$

1	1	1	1	3
1	1	1	2	2
1	1	1	3	1
1	1	2	1	2
1	1	2	2	1
1	1	3	1	1
1	2	1	1	2
1	2	1	2	1
1	2	2	1	1
1	3	1	1	1
2	1	1	1	2
2	1	1	2	1
2	1	2	1	1
2	2	1	1	1
3	1	1	1	1
a	a	a	a	a

Machen wir hier zwei Abtheilungen von dreien und von zweien Elementen, so mufs zuerst die Verbindung zu dreien zur Summe 3 mit den Verbindungen zu zweien zur Summe $7-3$ oder 4 vereint vorkommen. Wird die Summe zur Linken um 1 vermehrt, so mufs die Summe zur Rechten um 1 vermindert werden, nämlich

111	13	112	12	113	11
	22	121	21	122	
	31	211		131	
				212	
				221	
				311	

oder in Zeichen:

$$^{7}\overset{5}{C} = {}^{3}\overset{3}{C}\,{}^{4}\overset{2}{C} + {}^{4}\overset{3}{C}\,{}^{3}\overset{2}{C} + {}^{5}\overset{3}{C}\,{}^{2}\overset{2}{C}$$

$$\text{oder } {}^{5}\overset{2}{A} = {}^{3}\overset{\circ}{A}\,{}^{2}\overset{2}{A} + {}^{3}\overset{1}{A}\,{}^{2}\overset{1}{A} + {}^{3}\overset{2}{A}\,{}^{2}\overset{\circ}{A}$$

$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots)$$

Der allgemeine Grund für dieses Zerlegen ist einfach und klar, nâmlich die Summe jeder Verbindung von ${}^{n}\overset{m}{A}$ ist $n+m$; geben die q ersten Elemente der Verbindung die Summe $q+s$, so beträgt die Summe der $n-q$ übrigen Elemente $n+m-q-s$, und jede Verbindung der erstern mufs mit jeder Verbindung der zweiten vereint vorkommen, denn ${}^{n}\overset{m}{A}$ enthält alle Verbindungen zu n Elementen zur Summe $n+m$.

Hier haben wir wieder eine und dieselbe Wahrheit auf zweien verschiedenen Wegen gefunden; wir begnügen uns hier auf die Verschiedenheit der Beweise aufmerksam gemacht zu haben, und bemerken nur noch in Hinsicht der Mittel, wodurch das Bildungsgeschäft der Glieder erleichtert wird, dafs wir in der Folge noch andere und auch allgemeinere Vorschriften aufsuchen werden.

Messen.

§. 7.

Das Messen einer Zahl durch eine andere Zahl ist ein wiederholtes Abzählen des Maasses, bis die erstere Zahl ganz erschöpft ist. Besteht das Maafs aus zweien oder mehreren Elementen, so ändert dieses nichts im Geschäfte, nur fordert die Vielheit der Elemente eine zweckmässige Anordnung der Verbindungen der Elemente, welche durch das Messen hervorgebracht werden, damit das Gesetz ihrer Bildung klar und deutlich hervorleuchte.

Wählen wir zum ersten Maasse $1 - a$ eine Zahl, welche aus zweien Elementen besteht und messen 1 durch dieselbe, so ist das Geschäft in Zeichen folgendes:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 - a \\ \hline 1 - a & 1 + a + a^2 + \ldots\ldots \\ \hline + a & \\ a - a^2 & \\ \hline + a^2 & \\ a^2 - a^3 & \\ \hline + a^3 & \end{array}$$

Indem wir das Maafs 1mal abzählen bleibt $+ a$ übrig, zählen wir es a mal ab, so bleibt a^2, und durch a^2 maliges Abzählen bleibt a^3, . . . übrig. Indem das letzte Glied in der Reihe noch mit a vervielfacht wird, enthält der neue Rest einen Faktor a mehr als genanntes Glied, welcher wieder als folgendes Glied in die zu bildende Reihe aufgenommen wird. Das Gesetz der Reihe, welche hier entsteht, ist sehr einfach und entschädigt für die unvollendete Arbeit.

10) $$\frac{1}{1-a} = 1 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots$$

§. 8.

Wir haben mit dem Einfachsten den Anfang gemacht und 1 durch 1 — a gemessen. Nehmen wir eine Zahl,

$$1 + \overset{1}{M} + \overset{2}{M} + \overset{3}{M} + \overset{4}{M} \ldots\ldots$$

welche aus unbestimmt vielen Elementen besteht, und messen solche durch 1 — a, so ist das Geschäft weitläufiger,

$$\begin{array}{l|l}
1 + \overset{1}{M} + \overset{2}{M} + \overset{3}{M} + \overset{4}{M} + \ldots & \frac{1 - a}{1 + \overset{1}{M} + \overset{2}{M} + \overset{3}{M} + \ldots} \\
\frac{1 - a}{} & \\
\quad + \overset{1}{M} & \\
\quad + a & \\
\hline
\quad\quad + \overset{2}{M} & \\
\quad\quad\; \overset{1}{M}a & \\
\quad\quad\; aa & \\
\hline
\quad\quad\quad\; \overset{3}{M} & \\
\quad\quad\quad\; \overset{2}{M}a & \\
\quad\quad\quad\; \overset{1}{M}aa & \\
\quad\quad\quad\; aaa & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad \overset{4}{M} & \\
\quad\quad\quad\quad \overset{3}{M}a & \\
\quad\quad\quad\quad \overset{2}{M}aa & \\
\quad\quad\quad\quad \overset{1}{M}aaa & \\
\quad\quad\quad\quad aaaa &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a \\
\overset{1}{M}a \\
aa \\
\overset{2}{M}a \\
\overset{1}{M}aa \\
aaa
\end{array}$$

Durch einmaliges Abzählen des Maasses 1 — a entsteht der erste Rest $\overset{1}{M}$ + a, welcher in die Reihe als zweites Glied getragen wird; dieses Glied wird mit a vervielfacht, und bildet in Vereinigung mit dem folgenden Elemente $\overset{2}{M}$ den neuen Rest $\overset{2}{M} + \overset{1}{M}a + aa$ oder das folgende Glied. Das Verfahren ist hier vorgezeichnet und hat einen steten unveränderlichen Gang angenommen; es wird nämlich jedes Glied in der neuen Reihe aus dem ebensovielten Elemente der gegebenen Reihe und aus dem vorhergehenden

Gliede der neuen Reihe, vervielfacht mit a, gebildet; das (p+1)te Glied in dieser Reihe ist also:

$$\overset{p}{M} + a^1\overset{p-1}{M} + a^2\overset{p-2}{M} + a^3\overset{p-3}{M} + \ldots a^{p-1}\overset{1}{M} + a^p$$

und folglich

$$11) \quad \frac{1 + M + M + M + M + \ldots}{1 - a} = \begin{array}{l} 1 \\ + \overset{1}{M} + a^1 \\ + \overset{2}{M} + \overset{1}{M}a^1 + a^2 \\ + \overset{3}{M} + \overset{2}{M}a^1 + \overset{1}{M}a^2 + a^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

§. 9.

Nachdem wir eine Reihe durch die zweitheilige Zahl 1 — a gemessen haben, können wir das Messen der Einheit durch andere ähnliche zweitheilige Zahlen fortsetzen. Das Messen der Einheit durch 1 — a erzeugte die Reihe

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots$$

in welcher die Stellenzahlen eben so viele Faktoren ankündigen. Messen wir diese Reihe durch die zweitheilige Zahl 1 — b, so gelangen wir ohne das Geschäft vorzunehmen zum Resultate, wenn wir in die obige Reihe 11) a^p statt $\overset{p}{M}$ und b statt a einführen; das (p+1)te Glied wird seyn

$$a^p + a^{p-1}b^1 + a^{p-2}b^2 + \ldots a^1b^{p-1} + b^p$$

in welchem die einzelnen Verbindungen aus gleich vielen Faktoren bestehen, deren Anzahl p ist. Da diese Verbindungen die sämmtlichen geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den beiden Elementen a und b sind, so können wir ein solches Glied durch $'\overset{p}{C}_{(a,b)}$ vorstellen, und die Bildung der ganzen Reihe durch folgende Zeichen:

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = 1 + {}'\overset{1}{C}_{(a,\ b)} + {}'\overset{2}{C} + {}'\overset{3}{C} + \ldots + {}'\overset{p}{C} + \ldots$$

Ein drittes Maafs $1 - c$ fordert, die eben gefundene Reihe an die Stelle der Reihe mit M in 11) und c statt des dortigen a einzuführen. Hierdurch entsteht eine neue Reihe, deren allgemeines Glied

$${}'\overset{p}{C} + {}'\overset{p-1}{C}_{(a,\ b)}c^1 + {}'\overset{p-2}{C}c^2 + {}'\overset{p-3}{C}c^3 + \ldots + {}'\overset{1}{C}c^{p-1} + c^p$$

ist. Die Verbindungen, welche dieses pte Glied bilden, sind die sämmtlichen geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, und können durch

$${}'\overset{p}{C}_{(a,\ b,\ c)}$$

vorgestellt werden. Es ist also

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)} = 1 + {}'\overset{1}{C} + {}'\overset{2}{C} + {}'\overset{3}{C} + \ldots + {}'\overset{p}{C} + \ldots$$
$$(a,\ b,\ c)$$

Das Geschäft befolgt eine stete und unabänderliche Regel, ein neues Maafs fordert, dafs die vorhergehende Reihe an die Stelle der Reihe

$$1 + \overset{1}{M} + \overset{2}{M} + \overset{3}{M} + \ldots$$

und das neue Element an die Stelle des a gesetzt werde, wodurch wieder das allgemeine Glied eben so gebildet wird, als das allgemeine Glied der vorhergehenden Reihe. Die Zeichen für die allgemeine Bildung der Reihe, welche durch das Messen der Einheit durch mehrere zweitheilige Maasse erzeugt wird, sind folgende:

12) $$\frac{1}{(1-\overset{1}{a})(1-\overset{2}{a})(1-\overset{3}{a})\ldots(1-\overset{n}{a})} = 1 + {}'\overset{1}{C} + {}'\overset{2}{C} + {}'\overset{3}{C} + \ldots + {}'\overset{p}{C} + \ldots$$
$$(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a},\ \ldots\ \overset{n}{a})$$

Wir haben hier zum ersten Elemente des Maasses 1 und das vernei-
nende Verbindungszeichen gewählt. Dieses geschah, um durch die Einfachheit der Maasse selbst das Geschäft zu erleichtern. Es ist sehr leicht, statt dieses Elements ein anderes x und ein anderes Zeichen einzuführen, denn setzen wir:

$$-\frac{\overset{1}{a}}{x},\ -\frac{\overset{2}{a}}{x},\ \ldots\ -\frac{\overset{n}{a}}{x}$$

statt $a^1, a^2, \ldots a^n$

so erhalten wir folgende Reihe:

$$13)\quad \frac{1}{(x+a^1)(x+a^2)(x+a^3)\ldots(x+a^n)} = x^{-n} - {}'C^1 x^{-n-1} + {}'C^2 x^{-n-2} - {}'C^3 x^{-n-3} + \ldots$$
$$\ldots (-1)^p \cdot {}'C^p x^{-n-p} \ldots$$
$$(a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots a^n)$$

In dem besondern Falle, wenn die Elemente $a^1, a^2, \ldots a^n$ gleich sind, werden die Verbindungen, welche zu einem und demselben Gliede gehören, identisch, und in dem Gliede ${}'C^p$ tritt statt aller nur eine Verbindung a^p auf, aber so oft, als geordnete Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen gebildet werden können, also $\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,p}$ mal. Es ist also

$$\frac{1}{(x+a)^n} = x^{-n} - \frac{n}{1}\,.\,x^{-n-1}\,.\,a^1 + \frac{n(n+1)}{1.2}\,x^{-n-2}a^2 \ldots$$
$$\ldots\ldots (-1)^p\,\frac{n(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,p}\,x^{-n-p}a^p + \ldots\ldots\ldots$$

Bemerken wir, dafs $\frac{1}{(x+a)^n} = (x+a)^{-n}$ und

$$\frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,p} \text{ oder } -{}^n\mathfrak{A}^p \text{ statt } (-1)^p$$
$$\cdot\,\frac{n(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,p} \text{ gesetzt werden kann, so erhalten}$$

wir hier für die verneinte Potenz des Binomiums dieselbe Bildungsweise der Reihe als für die bejahete Potenz desselben, nämlich

$$14)\quad (x+a)^{-n} = -{}^n\mathfrak{A}^0 x^{-n} + -{}^n\mathfrak{A}^1 x^{-n-1}a^1 + -{}^n\mathfrak{A}^2 x^{-n-2}a^2 + \ldots + -{}^n\mathfrak{A}^p x^{-n-p}a^p + \ldots:$$

§. 10.

Wir gehen zu einem Maafs über, welches aus mehreren Elementen besteht, und messen 1 durch die Reihe

$$1 - a^1 x^1 - a^2 x^2 - a^3 x^3 - a^4 x^4 - \ldots\ldots$$

Das Geschäft selbst ist:

$$\frac{1}{\begin{array}{l} \underline{+\overset{1}{a}x^1} + \overset{2}{a} \\ \text{oder } \overset{1}{D}x^1 \quad \underline{\overset{1\,1}{D}a} \\ \qquad\qquad \text{oder } \overset{2}{D}x^2 \quad \underline{\overset{2\,1}{D}a} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{oder } \overset{3}{D}x^3 \end{array} \Big| x^2 + \begin{array}{l} \overset{3}{a} \\ \overset{1\,2}{D}a \\ \overset{2\,2}{D}a \\ \overset{3\,1}{D}a \end{array} \Big| x^3 + \begin{array}{l} \overset{4}{a} \\ \overset{1\,3}{D}a \\ \overset{2\,3}{D}a \\ \overset{3\,2}{D}a \end{array} \Big| x^4 + \ldots.} \qquad \frac{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \overset{3}{a}x^3 - \ldots}{1 + \overset{1}{D}x^1 + \overset{2}{D}x^2 + \overset{3}{D}x^3 + \ldots}$$

Wir nennen die Vorzahlen von den verschiedenen Potenzen der Grundzahl x: $\overset{1}{D}, \overset{2}{D}, \overset{3}{D}, \ldots$. Den ersten Rest bilden die Elemente der vorgegebenen Reihe mit entgegengesetzten Zeichen:

$$\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots + \overset{p}{a}x^p + \ldots$$

wovon das erste $\overset{1}{a}x^1$ als zweites Glied $\overset{1}{D}x^1$ in die zu bildende Reihe getragen wird. Durch die Verbindung dieses Gliedes mit den Elementen der vorgegebenen Reihe entsteht

$$\overset{1}{D}x^1 - \overset{1\,1}{D}ax^2 - \overset{1\,2}{D}ax^3 - \ldots - \overset{1\,p-1}{D}ax^p - \ldots.$$

Der erste Theil $\overset{1}{D}x^1$ fällt aus der Rechnung und die übrigen Theile gesellen sich mit entgegengesetzten Zeichen zu dem noch übrigen Reste, so, dafs der zweite Rest

$$\begin{array}{l} \overset{2}{a} \\ \overset{1\,1}{D}a \end{array} \Big| x^2 + \begin{array}{l} \overset{3}{a} \\ \overset{1\,2}{D}a \end{array} \Big| x^3 + \begin{array}{l} \overset{4}{a} \\ \overset{1\,3}{D}a \end{array} \Big| x^4 + \ldots + \begin{array}{l} \overset{p}{a} \\ \overset{1\,p-1}{D}a \end{array} \Big| x^p + \ldots.$$

ist, wovon der erste Theil $(\overset{2}{a} + \overset{1\,1}{D}a)x^2$ als drittes Glied $\overset{2}{D}x^2$ in der zu bildenden Reihe auftritt. Dieses Glied wird mit den Elementen der vorgegebenen Reihe verbunden, und es entstehen die Produkte

$$\overset{2}{D}x^2 - \overset{2\,1}{D}ax^3 - \overset{2\,2}{D}ax^4 - \ldots - \overset{2\,p-2}{D}ax^p - \ldots.$$

wovon das erste Produkt aus der Rechnung fällt, und die übrigen mit entgegengesetzten Zeichen mit dem noch übrigen Reste den neuen Rest

$$\begin{vmatrix} \overset{3}{a} \\ \overset{1}{D}\overset{2}{a} \\ \overset{2}{D}\overset{1}{a} \end{vmatrix} x^3 + \begin{vmatrix} \overset{4}{a} \\ \overset{1}{D}\overset{3}{a} \\ \overset{2}{D}\overset{2}{a} \end{vmatrix} x^4 + \ldots + \begin{vmatrix} \overset{p}{a} \\ \overset{1}{D}\overset{p-1}{a} \\ \overset{2}{D}\overset{p-2}{a} \end{vmatrix} x^p + \ldots$$

bilden.

Bei diesem Bilden der Reste kehren, das Uebertragen in die zu bildende Reihe, das Vervielfachen, und das Abzählen, immer in derselben Ordnung wieder zurück. In dem neuen Reste gruppiren sich die Elemente der gegebenen Reihe und die Glieder der zu bildenden Reihe zusammen; es gesellen sich zu $\overset{p}{a}x^p$

durch Vervielfachung von $\overset{1}{D}x^1$ und $\overset{p-1}{a}x^{p-1}$

.... $\overset{2}{D}x^2$ und $\overset{p-2}{a}x^{p-2}$

.... $\overset{3}{D}x^3$ und $\overset{p-3}{a}x^{p-3}$

. . . . . .

.... $\overset{q}{D}x^q$ und $\overset{p-q}{a}x^{p-q}$

die Produkte

$$(\overset{1}{D}\overset{p-1}{a} + \overset{2}{D}\overset{p-2}{a} + \ldots + \overset{q}{D}\overset{p-q}{a} + \ldots)x^p$$

bis zuletzt die Verbindung von $\overset{p-1}{D}x^{p-1}$ und $\overset{1}{a}x^1$ durch $\overset{p-1}{D}\overset{1}{a}x^p$ die Reihe dieser Produkte schliefst und diese sämmtlichen Produkte an die Spitze des Restes stellt, worauf sie als das folgende Glied $\overset{p}{D}x^p$ in der neuen Reihe auftreten.

Diese rücklaufende Bildungsweise der folgenden Glieder der Reihe

15) $$\frac{1}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \overset{3}{a}x^3 - \ldots} = \overset{0}{D}x^0 + \overset{1}{D}x^1 + \overset{2}{D}x^2 + \ldots + \overset{p}{D}x^p + \ldots$$

aus den vorhergehenden Gliedern können wir kurz durch folgende Gleichungen bemerkbar machen:

16) $\overset{0}{D} = 1 \quad \ldots + x^p \left| \begin{matrix} \overset{p}{a} \\ D\,a \\ D^2 a \\ \vdots \\ D^p a \end{matrix} \right| + \ldots + x^1 \left| \begin{matrix} \overset{1}{a} \\ D\,a \end{matrix} \right|$

$$\overset{1}{D} = \overset{1}{a}$$

$$\overset{2}{D} = \overset{2}{a} + \overset{1\,1}{D\,a}$$

$$\overset{3}{D} = \overset{3}{a} + \overset{1\,2}{D\,a} + \overset{2\,1}{D\,a}$$

$$\overset{4}{D} = \overset{4}{a} + \overset{1\,3}{D\,a} + \overset{2\,2}{D\,a} + \overset{3\,1}{D\,a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{p}{D} = \overset{p}{a} + \overset{1\,p-1}{D\,a} + \overset{2\,p-2}{D\,a} + \overset{3\,p-3}{D\,a} + \ldots + \overset{p-1\,1}{D\,a}$$

$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots)$$

Von dieser rücklaufenden Bildungsweise zur unabhängigen ist hier ein leichter Schritt. Zuerst vertritt $\overset{1}{D}$ das einzelne Element $\overset{1}{a}$ mit der Stellenzahl 1 und kann durch $^1\overset{1}{C}$ ersetzt werden.

Setzen wir dieses Element $\overset{1}{a}$ in $\overset{2}{D}$ statt $\overset{1}{D}$, so finden wir, dafs $\overset{2}{D}$ alle mögliche Verbindungen zur Summe 2 enthält, welche durch

$$\overset{2}{D} = {}^2\overset{1}{C} + {}^2\overset{2}{C}$$

vorgestellt werden.

Indem wir zur folgenden Gleichung übergehen, und die Verbindungen statt der vorigen Glieder einführen:

$$\overset{3}{D} = \overset{3}{a} \quad \left| \begin{matrix} {}^1\overset{1\,2}{C}a + {}^2\overset{1\,1}{C}a \\ {}^2\overset{2\,1}{C}a \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} {}^3\overset{1}{C} \\ + {}^3\overset{2}{C} \\ + {}^3\overset{3}{C} \end{matrix} \right|$$

erhalten wir zuerst das einzelne Element, dessen Stellenzahl 3 ist. Die folgende Horizontalreihe giebt alle mögliche Verbindungen zu zweien, und die letzte zu dreien zur Summe 3.

Indem wir so fortschreiten zur vierten Gleichung

$$\overset{4}{D} = \begin{vmatrix} \overset{4}{a} & & & \\ {}^{1}\overset{1\ 3}{C}a + {}^{2}\overset{1\ 2}{C}a + {}^{3}\overset{1\ 1}{C}a & & & \\ {}^{2}\overset{2\ 2}{C}a + {}^{3}\overset{2\ 1}{C}a & & & \\ {}^{3}\overset{3\ 1}{C}a & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^{4}\overset{1}{C} \\ + {}^{4}\overset{2}{C} \\ + {}^{4}\overset{3}{C} \\ + {}^{4}\overset{4}{C} \end{vmatrix}$$

und zur pten Gleichung

$$\overset{p}{D} = \begin{vmatrix} \overset{p}{a} & & & & & \\ {}^{1}\overset{1\ p-1}{C}a + {}^{2}\overset{1\ p-2}{C}a + {}^{3}\overset{1\ p-3}{C}a + \ldots + {}^{p-1}\overset{1\ 1}{C}a & & & & & \\ {}^{2}\overset{2\ p-2}{C}a + {}^{3}\overset{2\ p-3}{C}a + \ldots + {}^{p-1}\overset{2\ 1}{C}a & & & & & \\ {}^{3}\overset{3\ p-3}{C}a + \ldots + {}^{p-1}\overset{3\ 1}{C}a & & & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\ + {}^{p-1}\overset{p-1\ 1}{C}a & & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^{p}\overset{1}{C} \\ + {}^{p}\overset{2}{C} \\ + {}^{p}\overset{3}{C} \\ + {}^{p}\overset{4}{C} \\ \ldots \\ + {}^{p}\overset{p}{C} \end{vmatrix}$$

erzeugt eine gleiche Bildungsweise auch gleiche Gesetze in den einzelnen Verbindungen. Die $(q+1)$te Horizontalreihe

$${}^{q}\overset{q\ p-q}{C}a + {}^{q+1}\overset{q\ p-q-1}{C}a + {}^{q+2}\overset{q\ p-q-2}{C}a + \ldots + {}^{p-1}\overset{q\ 1}{C}a$$

enthält alle mögliche Verbindungen zu $q+1$ Elementen zur Summe p, denn es werden alle mögliche Verbindungen zu q Elementen zur Summe

. . . . . $q, q+1, q+2, \ldots {}^{p}-1$

mit den Elementen, deren Stellenzahlen . . . . . $p-q, p-q-1, p-q-2, \ldots . 1$

sind, verbunden. Das Glied $\overset{p}{D}$ besteht also aus allen möglichen Verbindungen zu einem, zweien, dreien, ... p Elementen zur Summe p. Die Zeichen für diese unabhängige Bildungsweise sind

17) $$\overset{p}{D} = {}^{p}\overset{1}{C} + {}^{p}\overset{2}{C} + {}^{p}\overset{3}{C} + {}^{p}\overset{4}{C} + \ldots {}^{p}\overset{p}{C}$$

$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots .)$$

Es ist z. B. $\overset{5}{D} =$

					5
				1	4
				2	3
				3	2
				4	1
			1	1	3
			1	2	2
			1	3	1
			2	1	2
			2	2	1
			3	1	1
		1	1	1	2
		1	1	2	1
		1	2	1	1
		2	1	1	1
	1	1	1	1	1
	a	a	a	a	a

§. 11.

Das Messen einer Reihe durch eine andere bringt zwar Verbindungen hervor, welche aus verschiedenartigen Elementen zusammengesetzt sind, wird aber auf dieselbe Weise, wie vorhin, angeordnet. Sollen die Reihen

$$\frac{1 + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \overset{3}{b}x^3 + \ldots}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \overset{3}{a}x^3 + \ldots}$$

gemessen werden, und nennen wir die Vorzahlen der verschiedenen Potenzen der Grundzahl x in der Reihe, welche durch das Messen erzeugt wird, $\overset{1}{E}, \overset{2}{E}, \overset{3}{E}, \ldots\ldots$, so ist das Geschäft folgendes:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
1+\overset{1}{b} & x^1+\overset{2}{b} & x^2+\overset{3}{b} & x^3+\ldots.+\overset{p}{b}+\ldots. & \multicolumn{2}{l}{1-\overset{1}{a}x^1-\overset{2}{a}x^2-\overset{3}{a}x^3-\ldots.} \\
\overset{1}{a} & \overset{2}{a} & \overset{3}{a} & \overset{p}{a} & \multicolumn{2}{l}{} \\
\hline
\text{oder } \overset{1}{E}x^1 & \overset{1}{E}\overset{1}{a} & \overset{1}{E}\overset{2}{a} & \overset{1}{E}\overset{p-1}{a} & \multicolumn{2}{l}{1+\overset{1}{E}x+\overset{2}{E}x^2+\overset{3}{E}x^3+\ldots.+\overset{p}{E}x^p+\ldots.} \\
 & \text{oder } \overset{2}{E}x^2 & \overset{2}{E}\overset{1}{a} & \overset{2}{E}\overset{p-2}{a} & \multicolumn{2}{l}{} \\
 & & \vdots & \vdots & \multicolumn{2}{l}{} \\
 & & \overset{p-1}{E}\overset{1}{a} & & \multicolumn{2}{l}{} \\
 & & \hline & & \multicolumn{2}{l}{} \\
 & & \text{oder } \overset{p}{E}x^p & & \multicolumn{2}{l}{}
\end{array}$$

Der erste Rest besteht aus den einzelnen Elementen der ersten und aus den einzelnen Elementen der zweiten Reihe, wenn in dieser die Zeichen verändert sind, nämlich

$$\overset{1}{b}\Big|_{\overset{1}{a}}\, x^1 + \overset{2}{b}\Big|_{\overset{2}{a}}\, x^2 + \ldots. + \overset{p}{b}\Big|_{\overset{p}{a}}\, x^p + \ldots.$$

Der erste Theil dieses Restes $(\overset{1}{b} + \overset{1}{a})\, x^1$ tritt als folgendes Glied $\overset{1}{E}\, x^1$ in die dritte Reihe, dieses wird mit den Elementen der zweiten Reihe vervielfacht, die erste Verbindung $\overset{1}{E}\, x^1$ tritt aus der Rechnung und die folgenden Verbindungen mit entgegengesezten Zeichen bilden mit dem noch übrigen Reste den neuen Rest,

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\overset{2}{b} & x^2+\overset{3}{b} & x^3+\ldots.\overset{p}{b} & x^p+\ldots \\
\overset{2}{a} & \overset{3}{a} & \overset{p}{a} & \\
\overset{1}{E}\overset{1}{a} & \overset{1}{E}\overset{2}{a} & \overset{1}{E}\overset{p-1}{a} &
\end{array}$$

wovon der erste Theil als folgendes Glied $\overset{2}{E}\, x^2$ in die dritte Reihe übergeht.

Dieses Vervielfachen, Abzählen und Uebertragen kehrt immer in derselben Ordnung wieder zurück; in dem Reste vereinigen sich die Verbindungen, deren Stellenzahlen dieselbe Summe geben, zu dem folgenden Gliede der dritten Reihe, deren zurücklaufende Bildung wir in folgenden Gleichungen niederlegen können.

18) $$\frac{1 + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \overset{3}{b}x^3 + \ldots}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \overset{3}{a}x^3 - \ldots} = 1 + \overset{1}{E}x^1 + \overset{2}{E}x^2 + \ldots + \overset{p}{E}x^p + \ldots$$

19) $$\overset{1}{E} = \overset{1}{a} + \overset{1}{b}$$

$$\overset{2}{E} = \overset{2}{a} + \overset{1\,1}{E}a + \overset{2}{b}$$

$$\overset{3}{E} = \overset{3}{a} + \overset{1\,2}{E}a + \overset{2\,1}{E}a + \overset{3}{b}$$

$$\overset{4}{E} = \overset{4}{a} + \overset{1\,3}{E}a + \overset{2\,2}{E}a + \overset{3\,1}{E}a + \overset{4}{b}$$

. . . . . .

$$\overset{p}{E} = \overset{p}{a} + \overset{1\,p-1}{E}a + \overset{2\,p-2}{E}a + \overset{3\,p-3}{E}a + \ldots + \overset{p-1\,1}{E}a + \overset{p}{b}$$

Die Bildung der dritten Reihe würde, wenn die Elemente $\overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \overset{3}{b}, \ldots$ nicht vorhanden wären, mit der früheren in §. 10. zusammenfallen. Wenn wir die vorige Bedeutung von $\overset{p}{D}$ beibehalten, nämlich als Inbegriff aller möglichen Verbindungen zu einem, zweien, dreien .... zu p Elementen zur Summe p, so können wir von der zurücklaufenden zu der unabhängigen Bilduug der dritten Reihe übergehen.

Zuerst können wir in $\overset{1}{E}$ statt $\overset{1}{a}$ setzen $\overset{1}{D}$, so dafs

$$\overset{1}{E} = \overset{1}{D} + \overset{1}{b}$$

$\overset{2}{E}$ wird hiedurch $\overset{2}{E} = \overset{2}{a} + \left.\begin{matrix}\overset{1}{D} \\ \overset{1}{b}\end{matrix}\right| \overset{1}{a} + \overset{2}{b}$

wovon $\overset{2}{a} + \overset{1\,1}{D}a$ durch $\overset{2}{D}$ und $\overset{1\,1}{b}a$ durch $\overset{1\,1}{b}D$ vorgestellt werden können; es ist also

$$\overset{2}{E} = \overset{2}{D} + \overset{1\,1}{b}D + \overset{2}{b}$$

Ebenso ist

$$\overset{3}{E} = \overset{3}{a} + \overset{1}{D}\overset{1}{b}\Big|\overset{2}{a} + \overset{2}{D}\,\overset{1}{b}\overset{1}{D}\overset{2}{b}\Big|\overset{1}{a} + \overset{3}{b}$$

$$= \overset{3}{a} + \overset{1}{D}\overset{2}{a} + \overset{2}{D}\overset{1}{a} + \overset{1}{b}(\overset{2}{a} + \overset{1}{D}\overset{1}{a}) + \overset{2}{b}\overset{1}{a} + \overset{3}{b} \;\Big|\;=\Big|\; \overset{3}{D} + \overset{1}{b}\overset{2}{D} + \overset{2}{b}\overset{1}{D} + \overset{3}{b}$$

Die ersten Glieder der dritteu Reihe bestehen also aus Verbindungen der Elemente $\overset{1}{b}, \overset{2}{b}, ..$ mit $\overset{1}{D}, \overset{2}{D}, ...$ so dafs die Summe der Stellenzahlen der Stellenzahl des Gliedes gleich ist. Der Fortgang zu den folgenden Gliedern ist stät und unabänderlich, das Uebertragen der früheren Glieder in das folgende, das Sondern der Verbindungen, welche blos a enthalten und ihr Vereinigen mit $\overset{1}{b}, \overset{2}{b}, ...$ kehrt immer in derselben Ordnung zurück; die $(q+1)$te Horizontalreihe von

$$\overset{p}{E} = \overset{p}{a} + \overset{1}{D}\overset{1}{b}\Big|\overset{p-1}{a} + \overset{2}{D}\,\overset{1}{b}\overset{1}{D}\overset{2}{b}\Big|\overset{p-2}{a} + \ldots + \overset{p-1}{D}\,\overset{1}{b}\overset{p-2}{D}\overset{2}{b}\overset{p-3}{D}\Big|\overset{1}{a} + \overset{p}{b}$$

$$\ldots + \overset{p-2}{b}\overset{1}{D}\Big|$$

$$\overset{p-1}{b}\Big|$$

nämlich $\overset{q}{b}\,(\overset{p-q}{a} + \overset{1}{D}\overset{p-q-1}{a} + \overset{2}{D}\overset{p-q-2}{a} + \ldots + \overset{p-q-1}{D}\overset{1}{a})$

besteht aus Verbindungen, wovon jede das Element $\overset{q}{b}$ enthält, wovon aber die übrigen Elemente eine gleiche Summe $p-q$ der Stellenzahlen haben, und

welche sämmtlich durch $\overset{p-q}{D}$ vorgestellt werden. Die unabhängige Bildungsweise wird daher durch folgende Zeichen bemerkbar gemacht:

20)
$$\overset{1}{E} = \overset{1}{D} + \overset{1}{b}$$
$$\overset{2}{E} = \overset{2}{D} + \overset{1}{D}\overset{1}{b} + \overset{2}{b}$$
$$\overset{3}{E} = \overset{3}{D} + \overset{2}{D}\overset{1}{b} + \overset{1}{D}\overset{2}{b} + \overset{3}{b}$$
$$\overset{4}{E} = \overset{4}{D} + \overset{3}{D}\overset{1}{b} + \overset{2}{D}\overset{2}{b} + \overset{1}{D}\overset{3}{b} + \overset{4}{b}$$
. . . . . .
$$\overset{p}{E} = \overset{p}{D} + \overset{p-1}{D}\overset{1}{b} + \overset{p-2}{D}\overset{2}{b} + \overset{p-3}{D}\overset{3}{b} + \ldots + \overset{1}{D}\overset{p-1}{b} + \overset{p}{b}$$
$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots)$$

Fangen die beiden ersten Reihen nicht mit 1 sondern mit einem andern Elemente b und a an, so sind folgende Aenderungen nöthig

$$\frac{b + \overset{1}{b}x + \overset{2}{b}x^2 + ..}{a - \overset{1}{a}x - \overset{2}{a}x^2 - ..} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1 + \frac{\overset{1}{b}}{b}x^1 + \frac{\overset{2}{b}}{b}x^2 + ..}{1 - \frac{\overset{1}{a}}{a}x^1 - \frac{\overset{2}{a}}{a}x^2 - ..}$$

Wir sehen hieraus, dafs wir nun nöthig haben, um zu diesem allgemeinen Falle überzugehen, statt der Elemente

$$\overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \ldots \qquad \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$$

die Elemente $\frac{\overset{1}{b}}{b}, \frac{\overset{2}{b}}{b}, \ldots \qquad \frac{\overset{1}{a}}{a}, \frac{\overset{2}{a}}{a}, \ldots$

einzuführen. Die Gleichungen 20, worin die zurücklaufende Bildung niedergelegt war, bekommen nur ein Element mehr; setzen wir nämlich

$$\frac{b + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \ldots}{a - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \ldots} = \overset{0}{E} + \overset{1}{E}x + \overset{2}{E}x^2 + \ldots$$

so ist jetzt

21) $$\overset{\circ}{aE} = b$$

$$\overset{1}{aE} = \overset{1\circ}{aE} + \overset{1}{b}$$

$$\overset{2}{aE} = \overset{1\,1}{aE} + \overset{2\circ}{aE} + \overset{2}{b}$$

. . . . .

$$\overset{p}{aE} = \overset{1\;p-1}{aE} + \overset{2\;p-2}{aE} + \overset{3\;p-3}{aE} + \ldots + \overset{p\circ}{aE} + \overset{p}{b}$$

oder verändern wir die Zeichen, so erhalten wir die zurücklaufende Bildung von den Gliedern der Reihe

$$\frac{b + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \ldots}{a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots} = \overset{\circ}{E} + \overset{1}{E}x^1 + \overset{2}{E}x^2 + \ldots$$

in folgenden Gleichungen

22) $$\overset{\circ}{aE} = b$$

$$\overset{1}{aE} + \overset{1\circ}{aE} = \overset{1}{b}$$

$$\overset{2}{aE} + \overset{1\,1}{aE} + \overset{2\circ}{aE} = \overset{2}{b}$$

. . . . . .

$$\overset{p}{aE} + \overset{1\;p-1}{aE} + \overset{2\;p-2}{aE} + \overset{3\;p-3}{aE} + \ldots + \overset{p\circ}{aE} = \overset{p}{b}$$

§. 12.

Das Messen einer Reihe $1 + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 \ldots$ durch eine andere $1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \ldots$ führt uns jetzt weiter zum mehrmaligen Messen der Einheit durch die Reihe $1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \ldots$ Messen wir nämlich

$$\frac{1}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \ldots} = 1 + \overset{1}{D}x + \overset{2}{D}x^2 + \ldots$$

wieder durch dieselbe Reihe $1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \ldots$, so werden wir gleich die Endreihe erhalten, wenn wir in

$$\frac{1 + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \ldots}{1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \ldots} = 1 + \begin{vmatrix} \overset{1}{b} & x^1 + \begin{vmatrix} \overset{2}{b} & x^2 + \begin{vmatrix} \overset{3}{b} & x^3 + \ldots \\ \overset{1}{D} & \end{vmatrix} \\ \overset{1}{D} & \end{vmatrix} \\ \overset{2}{D} & \begin{vmatrix} \overset{1}{b} & \\ \overset{2}{D} & \end{vmatrix} \\ & \overset{3}{D} \end{vmatrix}$$

D statt b einführen, nämlich

$$\frac{1}{(1 - ax^1 - ax^2 - \ldots)^2} = 1 + \begin{vmatrix} \overset{1}{D} & x^1 + \begin{vmatrix} \overset{2}{D} & x^2 + \begin{vmatrix} \overset{3}{D} & x^3 + \ldots \\ \overset{1}{D}\overset{1}{D} & \overset{2}{D}\overset{1}{D} & \\ \overset{2}{D} & \overset{1}{D}\overset{2}{D} & \\ & \overset{3}{D} & \end{vmatrix} \\ \overset{1}{D} & \end{vmatrix}$$

Messen wir wieder durch die Reihe $1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 \ldots$, so müfsen wir statt $\overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \overset{3}{b}, \ldots$ die Zerfällungen von 1, 2, 3, ... einführen, nämlich

$$\begin{vmatrix} \overset{1}{D} & \\ \overset{1}{D} & \end{vmatrix} \text{ statt } \overset{1}{b}, \quad \begin{vmatrix} \overset{2}{D} & \\ \overset{1}{D}\overset{1}{D} & \\ \overset{2}{D} & \end{vmatrix} \text{ statt } \overset{2}{b}, \quad \begin{vmatrix} \overset{3}{D} & \\ \overset{2}{D}\overset{1}{D} & \\ \overset{1}{D}\overset{2}{D} & \\ & \overset{3}{D} \end{vmatrix} \text{ statt } \overset{3}{b}, \ldots.$$

und die Endreihe, welche entsteht, ist:

$$\frac{1}{(1 - ax^1 - ax^2 - \ldots)^3} = 1 + \begin{vmatrix} \overset{1}{D} & \\ \overset{1}{D}\overset{1}{D} & \\ \overset{2}{D} & \end{vmatrix} x^1 + \begin{vmatrix} \overset{2}{D} & \\ \overset{1}{D}\overset{1}{D} & \\ \overset{2}{D} & \\ \overset{1}{D}\overset{1}{D} & \\ \overset{1}{D} & \\ \overset{2}{D} & \end{vmatrix} x^2 + \ldots$$

$$+ \begin{vmatrix} D^{3} & & \\ D^{2}D^{1} & & \\ D^{1}D^{2} & & \\ D^{3} & & \\ \hline D^{2} & | & D^{1} \\ D^{1}D^{1} & | & \\ D^{2} & | & \\ \hline D^{1} & | & D^{2} \\ D^{1} & | & \\ \hline & | & D^{3} \end{vmatrix} x^{3} + \ldots$$

oder

$$= 1 + \begin{vmatrix} D^{1} & & \\ \hline D^{1} & | & \\ \hline & | & D^{1} \end{vmatrix} x^{1} + \begin{vmatrix} D^{2} & & \\ D^{1}D^{1} & | & D^{1} \\ \hline D^{2} & | & \\ \hline & | & D^{2} \end{vmatrix} x^{2} + \begin{vmatrix} D^{3} & & \\ D^{2}D^{1} & | & D^{1} \\ D^{1}D^{2} & | & \\ D^{3} & | & \\ \hline D^{1} & | & D^{2} \\ D^{1} & | & \\ \hline & | & D^{3} \end{vmatrix} x^{3} + \ldots$$

Die unabhängige Bildungsweise der Glieder $\overset{1}{E}, \overset{2}{E}, \overset{3}{E} \ldots \overset{p}{E}$ im vorigen §. besteht in dem Zerfällen einer Zahl p in zwei Abtheilungen, wovon die eine nur die D, und die andere die b besitzt, nämlich:

$$\begin{array}{c|c} \overset{p}{b} & x \\ \overset{p-1}{b} & \overset{1}{D} \\ \overset{p-2}{b} & \overset{2}{D} \\ \vdots & \vdots \\ \overset{1}{b} & \overset{p-1}{D} \\ & \overset{p}{D} \end{array}$$

Diese Abtheilungen erhalten beim zweimaligen Messen der Einheit durch dieselbe Reihe einerlei Buchstaben D, indem b in D übergeht. Beim dreimaligen Messen bedeuten die b alle mögliche Zerfällungen in zwei Abtheilungen und es werden dieselben von $\overset{p}{D}$ mit $\overset{o}{D}$ oder 1

$$\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \overset{p-1}{D} \ldots \overset{1}{D} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \overset{p-2}{D} \ldots \overset{2}{D} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \overset{1}{D} \ldots \overset{p-1}{D} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \overset{o}{D} \text{ oder } 1 \ldots \overset{p}{D} \end{array}$$

zu einem Gliede in der Endreihe vereinigt, wodurch also alle mögliche Zerfällungen von $\overset{p}{D}$ in dreien Abtheilungen entstehen, welche vereint die Vorzahl von x^p ausmachen.

Eine neue Reihe erzeugt eine neue Abtheilung, so, dafs beim n maligen Messen der Einheit durch eine und dieselbe Reihe die Vorzahl von x^p in der Endreihe aus allen Zerfällungen von $\overset{p}{D}$ in n Abtheilungen besteht.

Da nun $\overset{p}{D}$ alle mögliche Verbindungen zu einem, zweien, dreien ... p Elementen zur Summe p bedeutet; so werden in der Vorzahl von x^p in der Endgleichung alle mögliche Verbindungen zu einem, zweien, dreien, ... p Elementen zur Summe p in n Fächer vertheilt. Bezeichnen wir nun eine solche Bildungsweise aller Verbindungen der Elemente mit dem Buchstaben $^p\overset{n}{G}$, so, dafs die Zahl p zur Linken die Zahl, welche zerfällt werden soll, und n über G die Anzahl der Fächer bedeutet, so ist die End-

gleichung beim nmaligen Messen der Einheit durch die Reihe

$1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \ldots$ folgende:

$$23) \quad \frac{1}{(1 - \overset{1}{a}x^1 - \overset{2}{a}x^2 - \ldots)^n} = 1 + {}^1\overset{n}{G}x^1 + {}^2\overset{n}{G}x^2 + {}^3\overset{n}{G}x^3 + \ldots + {}^p\overset{n}{G}x^p + \ldots$$

$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots, \ldots \ldots \ldots)$$

Ist z. B. $n = 3$, $p = 2$, und $= 3$, so ist:

$${}^2\overset{3}{G} = \begin{array}{r|l|l|l} 2 & & & \\ 11 & & & \\ 1\ 1 & 1 & & \\ & 2 & 11 & \\ & 11 & 1\ 1 & 1 \\ 1 & 1\ 1 & & \\ & 2 & & \\ & 11 & & \end{array} = \begin{array}{r|l|l} 2 & & \\ 11 & & \\ 1\ 1 & 1 & \\ & 2 & 11 \\ & 11 & 1\ 1 \\ 1 & 1\ 1 & \\ & 2 & \\ & 11 & \end{array} \quad \text{und} \quad {}^3\overset{3}{G} = \begin{array}{r|l|l|l} 3 & & & \\ 12 & & & \\ 21 & & & \\ 111 & & & \\ 2\ 1 & & & \\ 11\ 1 & & & \\ 1\ 2 & & & \\ 1\ 11 & & & \\ & 3 & & \\ & 12 & & \\ & 21 & & \\ & 111 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 11 & & 1 & \\ 1\ 1 & 1 & 1 & \\ & 2 & 1 & \\ & 11 & 1 & \\ 1 & 2 & & \\ 1\ 1 & 11 & & \\ & 1\ 2 & & \\ & 1\ 11 & & \\ & 3 & & \\ & 12 & & \\ & 21 & & \\ & 111 & & \end{array} = \begin{array}{r|l|l} 3 & & \\ 12 & & \\ 1\ 2 & & \\ 1 & & 2 \\ & 12 & \\ & 1 & 2 \\ & & 12 \\ \hline 21 & & \\ 2\ 1 & & \\ 2 & & 1 \\ & 21 & \\ & 2 & 1 \\ & & 21 \\ \hline 111 & & \\ 11\ 1 & & \\ 11 & & 1 \\ 1\ 11 & & \\ 1\ 1 & & 1 \\ 1 & & 11 \\ & 111 & \\ & 11 & 1 \\ & 1 & 11 \\ & & 111 \end{array}$$

§. 13.

Das Bildungsgeschäft der Glieder der Endreihe kann sehr abgekürzt werden, statt jede Verbindung zur Summe p zu zerfällen, genügt es, jede Verbindung mit ihrer Zerfällungszahl zu vervielfachen. Wird von dieser Frei-

heit Gebrauch gemacht, so müssen die Verbindungen zur Summe p zu

einem Elemente mit $\frac{n}{1}$ oder $-{}^{n}\mathfrak{A}^{1}$

zweien . . . . . mit $\frac{n(n+1)}{1.2}$ oder $+{}^{n}\mathfrak{A}^{2}$

dreien . . . . . mit $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ oder $-{}^{n}\mathfrak{A}^{3}$

zu q Elementen mit $\frac{n(n+1)\ldots(n+q-1)}{1.2\ldots q}$ oder $(-1)^{q}.{}^{n}\mathfrak{A}^{q}$

vervielfacht werden. Diese Abkürzungen können wir durch folgende Gleichung bemerkbar machen:

24) $$ {}^{p}G^{n} = -{}^{n}\mathfrak{A}^{1}\,{}^{p}C^{1} + \ldots (-1)^{q}.{}^{n}\mathfrak{A}^{q}\,{}^{p}C^{q}\ldots $$
$$ \ldots (-1)^{p}.{}^{n}\mathfrak{A}^{p}\,{}^{p}C^{p} $$
$$ (a^{1}, a^{2}, \ldots\ldots a^{p}) $$

Wir haben bis jetzt die Form der Reihe $1 - a^{1}x^{1} - a^{2}x^{2}$, deren erstes Element 1 ist, worauf die übrigen Elemente mit dem verneinten Zeichen folgen, beibehalten. Diese Form gewährte uns den Vortheil, beim Geschäfte nicht durch die Wiederholungen des ersten Elements und durch die Verschiedenheit der Zeichen bei den einzelnen Verbindungen aufgehalten oder gestört zu werden. Jetzt können wir leicht statt des ersten Elements ein anderes Element $\overset{\circ}{a}$ oder kurz a und andere Zeichen aufnehmen. Indem wir nämlich statt der Elemente $a^{1}, a^{2}, \ldots . a^{p}, \ldots .$

die Elemente $-\frac{a^{1}}{a}, -\frac{a^{2}}{a}, \ldots -\frac{a^{p}}{a}, \ldots .$

einführen, geht die Gleichung 23 in folgende über:

$$ \frac{1}{(a+a^{1}x^{1}+a^{2}x^{2}+\ldots)^{n}} = a^{-n} + {}^{1}G^{n}x^{1}a^{-n} + \ldots + {}^{p}G^{n}x^{p}a^{-n} + \ldots . $$
$$ (-\frac{a^{1}}{a}, -\frac{a^{2}}{a}, \ldots\ldots\ldots\ldots) $$

und die Gleichung 24 über in

$$^{p}\overset{n}{G} = -^{n}\overset{1}{\mathfrak{A}}\ ^{p}\overset{1}{C}a^{-1} + -^{n}\overset{2}{\mathfrak{A}}\ ^{p}\overset{2}{C}a^{-2} + \ldots + -^{n}\overset{q}{\mathfrak{A}}\ ^{p}\overset{q}{C}a^{-q} + \ldots$$

$$\ldots + -^{n}\overset{p}{\mathfrak{A}}\ ^{p}\overset{p}{C}a^{-p}$$

$$\left(-\frac{\overset{1}{a}}{a}, -\frac{\overset{2}{a}}{a}, -\frac{\overset{3}{a}}{a}, \ldots\right) \quad (\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots)$$

Setzen wir daher

25) $(a + \overset{1}{a}x^{1} + \overset{2}{a}x^{2} + \ldots)^{-n} = -^{n}\overset{0}{A} + -^{n}\overset{1}{A}x + -^{n}\overset{2}{A}x^{2} + \ldots + -^{n}\overset{p}{A}x^{p} + \ldots$

$$(a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots)$$

so ist die allgemeine Bildung der Glieder der Endreihe folgende:

26) $$-^{n}\overset{f}{A} = -^{n}\overset{0}{\mathfrak{A}}\ ^{p}\overset{0}{C}a^{-n} + -^{n}\overset{1}{\mathfrak{A}}\ ^{p}\overset{1}{C}a^{-n-1} + \ldots + -^{n}\overset{q}{\mathfrak{A}}\ ^{p}\overset{q}{C}a^{-n-q} + \ldots$$

$$\ldots + -^{n}\overset{p}{\mathfrak{A}}\ ^{p}\overset{p}{C}a^{-n-p}$$

$$(a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots) \qquad (\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung 7, so finden wir, dafs eine und dieselbe Bildungsweise für die bejaheten und verneinten Potenzen einer Reihe statt findet.

§. 14.

Die zurücklaufende Bildung der folgenden Glieder aus den unmittelbar vorhergehenden Gliedern derselben Potenz beruht nur auf einer veränderten Folge der früheren Geschäfte. Wir haben die Einheit durch die Reihe $a + \overset{1}{a}x^{1} + \overset{2}{a}x^{2} + \ldots$ nach und nach nmal gemessen. Wir wissen, dafs es zu demselben Ziele führt, wenn zuerst das Produkt

$$(a + \overset{1}{a}x^{1} + \overset{2}{a}x^{2} + \ldots)^{n} = {}^{n}\overset{0}{A} + {}^{n}\overset{1}{A}x + {}^{n}\overset{2}{A}x^{2} + \ldots + {}^{n}\overset{p}{A}x^{p} + \ldots.$$

gebildet und dann die Einheit durch das schon gebildete Produkt auf einmal gemessen wird, in Zeichen

$$\frac{1}{{}^{n}\overset{0}{A} + {}^{n}\overset{1}{A}x + {}^{n}\overset{2}{A}x^{2} + \ldots.} = -^{n}\overset{0}{A} + -^{n}\overset{1}{A}x + -^{n}\overset{2}{A}x^{2} + \ldots$$

Diese veränderte Ordnung der Geschäfte gestattet uns, die frühere schon

gefundene zurücklaufende Bildung hier geltend zu machen. Setzen wir nämlich in 22, $b = 1$, und die folgenden Elemente $\overset{1}{b} = \overset{2}{b} = \ldots = 0$ und

statt a, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, ... die Glieder ${}^{n}\overset{0}{A}$, ${}^{n}\overset{1}{A}$, ${}^{n}\overset{2}{A}$, ...

und statt $\overset{0}{E}$, $\overset{1}{E}$, $\overset{2}{E}$, ... $-{}^{n}\overset{0}{A}$, $-{}^{n}\overset{1}{A}$, $-{}^{n}\overset{2}{A}$, ...

so finden wir für die zurücklaufende Bildung der verneinten Potenz folgende Gleichungen:

27)
$$ {}^{n}\overset{0}{A} - {}^{n}\overset{0}{A} = 1 $$
$$ {}^{n}\overset{0}{A} - {}^{n}\overset{1}{A} + {}^{n}\overset{1}{A} - {}^{n}\overset{0}{A} = 0 $$
$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots $$
$$ {}^{n}\overset{0}{A} - {}^{n}\overset{m}{A} + {}^{n}\overset{1}{A} - {}^{n}\overset{m-1}{A} + \ldots + {}^{n}\overset{q}{A} - {}^{n}\overset{m-q}{A} + \ldots + {}^{n}\overset{m}{A} - {}^{n}\overset{0}{A} = 0 $$
$$ (a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots\ldots\ldots) $$

Das frühere Messen einer Reihe durch eine zweite könnte auch hier noch benutzt werden, um die Glieder der höhern verneinten Potenz aus den Gliedern der unmittelbar niedern Potenz herzuleiten, wenn wir nicht vielmehr eilten, nachdem wir für beide Potenzen, sowohl bejaheten als verneinten, also für die Hauptglieder, eine gleiche Bildungsweise aufgefunden haben, zu untersuchen, ob dieselbe Bildungsweise auch bei den Zwischengliedern oder für den Fall, wenn n ein Bruch ist, sich bestätigen werde, um hernach allgemeinere Formen für die Bildung des Polynomiums aufstellen zu können.

Das Einschalten der Zwischenglieder in der Potenzenreihe.

§. 15.

Das Ausfüllen der Zwischenräume der Potenzenreihe beruhet auf dem Zerlegen einer Grösse P in n gleiche Faktoren und in dem m maligen Vervielfachen der neuen Grundgröfse oder in dem m maligen Messen der Einheit durch die neue Grundgröfse. In Zeichen

$$P^{\pm\frac{m}{n}} = (P^{\frac{1}{n}})^{\pm m}$$

Es ist bekannt, dafs wir die Ordnung dieser Geschäfte verändern und erst das Vervielfachen oder Messen und dann das Zerlegen in gleiche Faktoren vornehmen können, in Zeichen

$$P^{\pm\frac{m}{n}} = (P^{\pm m})^{\frac{1}{n}}$$

Wir wählen die letztere Ordnung und lassen das Zerlegen auf das Vervielfachen folgen; wir nehmen hiebei eine zweitheilige Gröfse $x + a$ für P an und vervielfachen $x + a$ oder messen 1 durch $x + a$, m mal, welches wir durch einerlei Zeichen darstellen können

$$(x + a^m) = {}^{m}\mathfrak{A}^{0} \cdot x^m + {}^{m}\mathfrak{A}^{1} \cdot x^{m-1} \cdot a^1 + \ldots + {}^{m}\mathfrak{A}^{k} \cdot x^{m-k} \cdot a^k + \ldots$$

in welcher Reihe nur m mit — bezeichnet werden mufs, um das Messen anzuzeigen. Das Zerlegen in dieser Reihe in gleiche Faktoren beginnen wir damit, dafs wir, um die Theile desto leichter zu unterscheiden, m aus zweien Theilen p und q bestehend annehmen, so dafs $m = p + q$ ist, und nun die Vorzahlen von x^m, x^{m-1}, ... in ihre einzelne Bestandtheile auflösen. Zuerst finden wir, dafs

$$_{p+q}^{o}\mathfrak{A} = 1 = {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A}$$

Wir gehen zur folgenden Vorzahl über, indem wir die vorige Vorzahl mit dem Faktor $\frac{p+q}{1}$ verbinden. Wir gesellen $\frac{p}{1}$ zu ${}_{p}^{o}\mathfrak{A}$ und $\frac{q}{1}$ zu ${}_{q}^{o}\mathfrak{A}$ und erhalten die beiden Produkte

$$_{p+q}^{1}\mathfrak{A} = {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \;\; {}_{q}^{o}\mathfrak{A} \,.\, \frac{p+q}{1} = {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, \frac{p}{1} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A} + {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A} \,.\, \frac{q}{1}$$

$$= {}_{p}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A} + {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{1}\mathfrak{A}$$

Vervielfachen wir die zweite Vorzahl oder die beiden eben gefundenen Produkte mit $\frac{p+q-1}{2}$, so entsteht die dritte Vorzahl

$$_{p+q}^{2}\mathfrak{A} = ({}_{p}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A} + {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{1}\mathfrak{A}) \,.\, \frac{p+q-1}{2}$$

Da aber der Faktor $\frac{p+q-1}{2}$ auf zwei Arten in zwei Theile zerlegt werden kann, so dafs die p und q von einander getrennt sind, nämlich in

$$\frac{p-1}{2} + \frac{q}{2} \text{ und in } \frac{p}{2} + \frac{q-1}{2}$$

so verbinden wir das erstere Produkt ${}_{p}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A}$ mit $\frac{p-1}{2} + \frac{q}{2}$

und das zweite Produkt ${}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{1}\mathfrak{A}$ mit $\frac{p}{2} + \frac{q-1}{2}$

wodurch folgende Produkte entstehen

$$_{p+q}^{2}\mathfrak{A} = {}_{p}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{2}^{p-1} + {}_{p}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A} \,.\, \frac{q}{2}$$

$$+ {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{1}\mathfrak{A} \,.\, \frac{p}{2} + {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{1}\mathfrak{A} \,.\, \frac{q-1}{2}$$

Gesellen wir nun die Faktoren, worin p, und die Faktoren, worin q vorkommt, zu einander, und bemerken, dafs

$${}_{p}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A} \,.\, \frac{q}{2} + {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{1}\mathfrak{A} \,.\, \frac{p}{2} = {}_{p}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{1}\mathfrak{A}$$

so finden wir folgende Bestandtheile von

$$_{p+q}^{2}\mathfrak{A} = {}_{p}^{2}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{o}\mathfrak{A} + {}_{p}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{1}\mathfrak{A} + {}_{p}^{o}\mathfrak{A} \,.\, {}_{q}^{2}\mathfrak{A}$$

Der Faktor $\frac{p+q-2}{3}$, womit die dritte Vorzahl vervielfacht werden mufs,

$$_{p+q}^{3}\mathfrak{A} = {}_{p+q}^{2}\mathfrak{A} \,.\, \frac{p+q-2}{3}$$

um die vierte zu erhalten, kann auf folgende drei Arten in zwei Theile zerlegt werden:

in $\frac{p-2}{3} + \frac{q}{3}$, in $\frac{p-1}{3} + \frac{q-1}{3}$ und in $\frac{p}{3} + \frac{q-2}{3}$ |

Von den vorigen dreien Produkten, welche die Bestandtheile von $p+q\overset{2}{\mathfrak{A}}$ sind, verbinden wir das erste $p\overset{2}{\mathfrak{A}} . q\overset{0}{\mathfrak{A}}$ mit der ersten, das zweite $p\overset{1}{\mathfrak{A}} . q\overset{1}{\mathfrak{A}}$ mit der zweiten, und das dritte $p\overset{0}{\mathfrak{A}} . q\overset{2}{\mathfrak{A}}$ mit der dritten Zerlegung, und erhalten dann durch Gruppirung der Faktoren, welche dasselbe Element enthalten, folgende Gleichung:

$$p+q\overset{3}{\mathfrak{A}} = p\overset{2}{\mathfrak{A}} . q\overset{0}{\mathfrak{A}} . \frac{p-2}{3} + p\overset{2}{\mathfrak{A}} . q\overset{0}{\mathfrak{A}} . \frac{q}{3}$$
$$+ p\overset{1}{\mathfrak{A}} . q\overset{1}{\mathfrak{A}} . \frac{p-1}{3} + p\overset{1}{\mathfrak{A}} . q\overset{1}{\mathfrak{A}} . \frac{q-1}{3}$$
$$+ p\overset{0}{\mathfrak{A}} . q\overset{2}{\mathfrak{A}} . \frac{p}{3} + p\overset{0}{\mathfrak{A}} . q\overset{2}{\mathfrak{A}} . \frac{q-2}{3}$$
$$= p\overset{3}{\mathfrak{A}} . q\overset{0}{\mathfrak{A}} + p\overset{2}{\mathfrak{A}} . q\overset{1}{\mathfrak{A}} + p\overset{1}{\mathfrak{A}} . q\overset{2}{\mathfrak{A}} + p\overset{0}{\mathfrak{A}} . q\overset{3}{\mathfrak{A}}$$

Der Weg von der vorigen zu der folgenden Vorzahl ist gebahnt, das Zerlegen des neuen Faktors auf so viele Arten als die vorige Vorzahl Produkte zählt, das Vervielfachen der Produkte mit diesen Zerlegungen, und das Vereinigen der Faktoren, welche denselben Buchstaben haben, kehrt immer in derselben Ordnung zurück und führt also auch wieder zu Produkten, die denselben Gesetzen unterworfen sind, welche die Produkte der vorigen Vorzahl befolgen. Wir kommen von

$$p+q\overset{h}{\mathfrak{A}} = p\overset{h}{\mathfrak{A}} . q\overset{0}{\mathfrak{A}} + p\overset{h-1}{\mathfrak{A}} . q\overset{1}{\mathfrak{A}} + \ldots + p\overset{h-k}{\mathfrak{A}} . q\overset{k}{\mathfrak{A}} + \ldots + p\overset{0}{\mathfrak{A}} . q\overset{h}{\mathfrak{A}}$$

durch Vervielfachung von

$p+q\overset{h}{\mathfrak{A}}$ mit $\frac{p+q-h}{h+1}$

$p\overset{h}{\mathfrak{A}} . q\overset{0}{\mathfrak{A}}$ mit $\frac{p-h}{h+1} + \frac{q}{h+1}$

$p\overset{h-1}{\mathfrak{A}} . q\overset{1}{\mathfrak{A}}$ mit $\frac{p-h+1}{h+1} + \frac{q-1}{h+1}$

. . . . . .

$p\overset{h-k}{\mathfrak{A}} . q\overset{k}{\mathfrak{A}}$ mit $\frac{p-h+k}{h+1} + \frac{q-k}{h+1}$

$p\overset{h-k-1}{\mathfrak{A}} . q\overset{k+1}{\mathfrak{A}}$ mit $\frac{p-h+k+1}{h+1} + \frac{q-k-1}{h+1}$

. . . . . .

$${}^{p}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{h}{\mathfrak{A}} \text{ mit } \frac{p}{h+1} + \frac{q-h}{h+1}$$

und durch Zuzählen je zweier Produkte, worin die Faktoren mit demselben Elemente vereinigt werden, nämlich:

$${}^{p}\overset{h-k}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{k}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{q-k}{h+1} + {}^{p}\overset{h-k-1}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{k+1}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{p-h+k+1}{h+1} =$$

$$= {}^{p}\overset{h-k-1}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{k}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{(p-h+k+1)(q-k)}{h+1} \cdot \left(\frac{1}{h-k} + \frac{1}{k+1}\right) = {}^{p}\overset{h-k}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{k+1}{\mathfrak{A}}$$

zu der folgenden Vorzahl

$${}^{p+q}\overset{h+1}{\mathfrak{A}} = {}^{p}\overset{h+1}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{o}{\mathfrak{A}} + {}^{p}\overset{h}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{A}} + {}^{p}\overset{h-1}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \ldots + {}^{p}\overset{h-k}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{k+1}{\mathfrak{A}} + \ldots$$

$$\ldots + {}^{p}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{h+1}{\mathfrak{A}}$$

Indem wir nun diese Produkte in die Reihe

$${}^{p+q}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q} + {}^{p+q}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q-1} \cdot a + \ldots {}^{p+q}\overset{k}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q-k} a^{k} + \ldots$$

einführen, nimmt sie folgende Gestalt an:

$${}^{p}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q} + {}^{p}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q-1} \cdot a^{1} + {}^{p}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q-2} \cdot a^{2}$$

$${}^{p}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{A}} \qquad {}^{p}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{A}}$$

$${}^{p}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{2}{\mathfrak{A}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + {}^{p}\overset{k}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q-k} \cdot a^{k} + \ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$${}^{p}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{q}\overset{k}{\mathfrak{A}}$$

welche offenbar das Produkt folgender beiden Reihen ist:

$${}^{p}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p} + {}^{p}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p-1} \cdot a^{1} + {}^{p}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p-2} \cdot a^{2} + \ldots$$

und

$${}^{q}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q} + {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q-1} \cdot a^{1} + {}^{q}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q-2} \cdot a^{2} + \ldots$$

Mit dieser Zerlegung einer Reihe von vorgegebener Form haben wir den Grund zur Zerlegung einer jeden solchen Reihe in beliebig viele Faktoren von derselben Gestalt gelegt; so zerlegen wir die Reihe

$${}^{p+q+r}\overset{o}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q+r} + {}^{p+q+r}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q+r-1} \cdot a^{1} + \ldots\ldots$$

zuerst in die beiden Reihen

$$ {}^{p}\overset{\circ}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p} + {}^{p}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p-1} \cdot a^{1} + {}^{p}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p-2} \cdot a^{2} + \ldots . $$

und

$$ {}^{q+r}\overset{\circ}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q+r} + {}^{q+r}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q+r-1} \cdot a^{1} + {}^{q+r}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q+r-2} \cdot a^{2} + \ldots $$

und letztere wieder in die Reihen

$$ {}^{q}\overset{\circ}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q} + {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q-1} \cdot a^{1} + {}^{q}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q-2} \cdot a^{2} + \ldots . $$

und

$$ {}^{r}\overset{\circ}{\mathfrak{A}} \cdot x^{r} + {}^{r}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{r-1} \cdot a^{1} + {}^{r}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{r-2} \cdot a^{2} + \ldots . $$

Es ist also ganz allgemein:

$$ {}^{p+q+r+\ldots}\overset{\circ}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q+r+\ldots} + {}^{p+q+r+\ldots}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p+q+r+\ldots-1} \cdot a^{1} + \ldots = $$

$$ = ({}^{p}\overset{\circ}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p} + {}^{p}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p-1} \cdot a^{1} + {}^{p}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{p-2} \cdot a^{2} + \ldots) $$

$$ \times ({}^{q}\overset{\circ}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q} + {}^{q}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q-1} \cdot a^{1} + {}^{q}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{q-2} \cdot a^{2} + \ldots) $$

$$ \times ({}^{r}\overset{\circ}{\mathfrak{A}} \cdot x^{r} + {}^{r}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{r-1} \cdot a^{1} + {}^{r}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{r-2} \cdot a^{2} \cdot + \ldots) $$

$$ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot $$

Gehen wir nun von den ungleichen zu den gleichen Faktoren über, und nehmen an, dafs jedes der Elemente p, q, r, ... der nte Theil von m oder $p = q = r \ldots = \frac{m}{n}$ sei, so ist

$$ {}^{m}\overset{0}{\mathfrak{A}} \cdot x^{m} + {}^{m}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{m-1} \cdot a^{1} + {}^{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{m-2} \cdot a^{2} + \ldots $$

$$ = ({}^{\frac{m}{n}}\overset{0}{\mathfrak{A}} \cdot x^{\frac{m}{n}} + {}^{\frac{m}{n}}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \cdot a^{1} + {}^{\frac{m}{n}}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cdot x^{\frac{m}{n}-2} \cdot a^{2} + \ldots) $$

$$ \times ({}^{\frac{m}{n}}\overset{0}{\mathfrak{A}} \cdot x^{\frac{m}{n}} + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot) $$

$$ \times ({}^{\frac{m}{n}}\overset{0}{\mathfrak{A}} \cdot x^{\frac{m}{n}} + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot) $$

$$ \times \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot $$

Hieraus gehet hervor, dafs, wenn $(x+a)^m = {}^m\overset{0}{\mathfrak{A}}.x^m + {}^m\overset{1}{\mathfrak{A}}.x^{m-1}a^1 + \ldots$ in n gleiche Faktoren zerlegt wird, jeder Faktor auf dieselbe Weise gebildet wird, als das Produkt, welches in n Faktoren zerlegt werden soll, oder in Zeichen, dafs

$$28) \quad (x+a)^{\frac{m}{n}} = {}^{\frac{m}{n}}\overset{0}{\mathfrak{A}}x^{\frac{m}{n}} + {}^{\frac{m}{n}}\overset{1}{\mathfrak{A}}x^{\frac{m}{n}-1}a^1 + {}^{\frac{m}{n}}\overset{2}{\mathfrak{A}}x^{\frac{m}{n}-2}a^2 + {}^{\frac{m}{n}}\overset{3}{\mathfrak{A}}x^{\frac{m}{n}-3}a^3 + \ldots.$$

§. 16.

Dieses gleiche Bildungsgesetz kann nun nicht mehr blofs auf die zweitheilige Grundzahl x + a eingeschränkt sein, sondern wird auch statt finden, wenn die Grundzahl aus mehreren Elementen besteht, oder wenn sie eine Reihe ist, welche nach den Potenzen einer bestimmten Hauptgröfse fortgeht; denn nehmen wir an, das, was auch f und g bedeuten,

$${}^{f+g}\overset{m}{A} = {}^{f+g}\overset{0}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{0}{C}a^{f+g} + {}^{f+g}\overset{1}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{1}{C}a^{f+g-1} + {}^{f+g}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{2}{C}a^{f+g-2} + \ldots + {}^{f+g}\overset{h}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{h}{C}a^{f+g-h} + \ldots + {}^{f+g}\overset{m}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{m}{C}a^{f+g-m}$$

$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots)$$

sei, so können wir diese Gröfse eben so in ähnliche Gröfsen ${}^fA$ und ${}^gA$ zerlegen als vorhin ${}^{f+g}\mathfrak{A}$ in ${}^f\mathfrak{A}$ und ${}^g\mathfrak{A}$. Bei dieser Zerlegung lösen wir zuerst die ${}^{f+g}\mathfrak{A}$ und dann die ${}^mC$ in ihre Bestandtheile auf, und erhalten daher, da für jedes f und g

$${}^{f+g}\overset{h}{\mathfrak{A}} = {}^f\overset{h}{\mathfrak{A}}\,{}^g\overset{0}{\mathfrak{A}} + {}^f\overset{h-1}{\mathfrak{A}}\,{}^g\overset{1}{\mathfrak{A}} + {}^f\overset{h-2}{\mathfrak{A}}\,{}^g\overset{2}{\mathfrak{A}} + \ldots + {}^f\overset{0}{\mathfrak{A}}\,{}^g\overset{h}{\mathfrak{A}}$$

ist, folgende Theile:

$$
\begin{aligned}
{}^{f+g}\overset{m}{A} &= {}^{f}\overset{o}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{o}{C}\,a^{f+g} \\
&+ ({}^{f}\overset{1}{\mathfrak{A}} + {}^{g}\overset{1}{\mathfrak{A}})\,{}^{m}\overset{1}{C}\,a^{f+g-1} \\
&+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ ({}^{f}\overset{h}{\mathfrak{A}} + {}^{f}\overset{h-1}{\mathfrak{A}}\,{}^{g}\overset{1}{\mathfrak{A}} + \ldots + {}^{g}\overset{h}{\mathfrak{A}})\,{}^{m}\overset{h}{C}\,a^{f+g-h} \\
&+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ ({}^{f}\overset{k}{\mathfrak{A}} + {}^{f}\overset{k-1}{\mathfrak{A}}\,{}^{g}\overset{1}{\mathfrak{A}} + \ldots + {}^{f}\overset{k-h}{\mathfrak{A}}\,{}^{g}\overset{h}{\mathfrak{A}} + \ldots + {}^{g}\overset{k}{\mathfrak{A}})\,{}^{m}\overset{k}{C}\,a^{f+g-k} \\
&+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ ({}^{f}\overset{m}{\mathfrak{A}} + {}^{f}\overset{m-1}{\mathfrak{A}}\,{}^{g}\overset{1}{\mathfrak{A}} + \ldots + {}^{f}\overset{m-h}{\mathfrak{A}}\,{}^{g}\overset{h}{\mathfrak{A}} + \ldots\ldots + {}^{g}\overset{m}{\mathfrak{A}})\,{}^{m}\overset{m}{C}\,a^{f+g-m}
\end{aligned}
$$

Die $(h+1)$te Scheitelreihe ist

$$
\begin{aligned}
&{}^{g}\overset{h}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{h}{C}\,a^{f+g-h} + {}^{g}\overset{h}{\mathfrak{A}}\,({}^{f}\overset{1}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{h+1}{C}\,a^{f-1} + {}^{f}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{h+2}{C}\,a^{f-2} + \ldots \\
&\ldots + {}^{f}\overset{k-h}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{k}{C}\,a^{f-k+h} + \ldots + {}^{f}\overset{m-h}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{m}{C}\,a^{f-m+h})\,a^{g-h}
\end{aligned}
$$

Die Produkte, welche in dieser $(h+1)$ten Scheitelreihe durch Klammern eingeschlossen sind, werden durch H vorgestellt, und nun die ${}^{m}C$ nach der Formel

$${}^{m}\overset{p}{C} = {}^{q}\overset{q}{C}\,{}^{m-q}\overset{p-q}{C} + {}^{q+1}\overset{q}{C}\,{}^{m-q-1}\overset{p-q}{C} + {}^{q+2}\overset{q}{C}\,{}^{m-q-2}\overset{p-q}{C} + \ldots + {}^{m-p-q}\overset{q}{C}\,{}^{p-q}\overset{p-q}{C}$$

welche schon in §. 6. vorgekommen ist, zerlegt, nämlich

$$
\begin{aligned}
H = {}^{f}\overset{1}{\mathfrak{A}}\,({}^{h}\overset{h}{C}\,{}^{m-h}\overset{1}{C} + {}^{h+1}\overset{h}{C}\,{}^{m-h-1}\overset{1}{C} + \ldots + {}^{s}\overset{h}{C}\,{}^{m-s}\overset{1}{C} + \ldots + {}^{m-1}\overset{h}{C}\,{}^{1}\overset{1}{C})\,a^{f-1} \\
+ {}^{f}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,({}^{h}\overset{h}{C}\,{}^{m-h}\overset{2}{C} + {}^{h+1}\overset{h}{C}\,{}^{m-h-1}\overset{2}{C} + \ldots + {}^{s}\overset{h}{C}\,{}^{m-s}\overset{f2}{C} + \ldots + {}^{m-2}\overset{f\,h}{C}\,{}^{2}\overset{2}{C})\,a^{f-2} \\
+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
+ {}^{f}\overset{m-s}{\mathfrak{A}}\,({}^{h}\overset{h}{C}\,{}^{m-h}\overset{m-s}{C} + {}^{h+1}\overset{h}{C}\,{}^{m-h-1}\overset{m-s}{C} + \ldots + {}^{s}\overset{h}{C}\,{}^{m-s}\overset{m-s}{C})\,a^{f-m+s} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
+ {}^{f}\overset{m-h}{\mathfrak{A}} \cdot {}^{h}\overset{h}{C}\,{}^{m-h}\overset{m-h}{C} \cdot a^{f-m+h}
\end{aligned}
$$

Die s te Scheitelreihe in H ist

$$ {}^{s}\overset{h}{C}\,({}^{f}\overset{1}{\mathfrak{A}}\,{}^{m-s}\overset{1}{C}\,a^{f-1} + {}^{f}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,{}^{m-s}\overset{2}{C}\,a^{f-2} + \ldots + {}^{f}\overset{m-s}{\mathfrak{A}}\,{}^{m-s}\overset{m-s}{C}\,a^{f-m+s}) $$

und nach der obigen Annahme $= {}^{s}\overset{h}{C}\,{}^{f}\overset{m-s}{A}$

Setzen wir nun statt s die Werthe h, h+1, h+2, . . . , m—1, so erhalten wir folgende Produkte für H.

$$ H = {}^{h}\overset{h}{C}\,{}^{f}\overset{m-h}{A} + {}^{h+1}\overset{h}{C}\,{}^{f}\overset{m-h-1}{A} + {}^{h+2}\overset{h}{C}\,{}^{f}\overset{m-h-2}{A} + \ldots + {}^{m-1}\overset{h}{C}\,{}^{f}\overset{1}{A} $$

Das erste Produkt in der (h+1)ten Scheitelreihe ist

$$ {}^{g}\overset{h}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{h}{C}\,a^{f+g-h} = {}^{g}\overset{h}{\mathfrak{A}}\,{}^{m}\overset{h}{C}\,a^{g-h}\,.\,{}^{f}\overset{\circ}{A} $$

denn nach der obigen Annahme ist $a^{f} = {}^{f}\overset{\circ}{A}$, und folglich die (h+1)te Scheitelreihe

$$ {}^{g}\overset{h}{\mathfrak{A}}\,({}^{h}\overset{h}{C}\,{}^{f}\overset{m-h}{A} + {}^{h+1}\overset{h}{C}\,.\,{}^{f}\overset{m-h-1}{A} + {}^{h+2}\overset{h}{C}\,.\,{}^{f}\overset{m-h-2}{A} + \ldots + {}^{m-1}\overset{h}{C}\,{}^{f}\overset{1}{A} + {}^{m}\overset{h}{C}\,{}^{f}\overset{\circ}{A})\,a^{g-h} $$

Setzen wir nun hierin h = 0, 1, 2, ... m, so wird

$$ {}^{f+g}\overset{m}{A} = {}^{g}\overset{\circ}{\mathfrak{A}}\,({}^{\circ}\overset{\circ}{C}\,{}^{f}\overset{m}{A} + {}^{1}\overset{\circ}{C}\,{}^{f}\overset{m-1}{A} + {}^{2}\overset{\circ}{C}\,{}^{f}\overset{m-2}{A} + \ldots {}^{p}\overset{\circ}{C}\,{}^{f}\overset{m-p}{A} + \ldots + {}^{m}\overset{\circ}{C}\,{}^{f}\overset{\circ}{A})\,a^{g} $$

$$ + {}^{g}\overset{1}{\mathfrak{A}}\,(\quad {}^{1}\overset{1}{C}\,{}^{f}\overset{m-1}{A} + {}^{2}\overset{1}{C}\,{}^{f}\overset{m-2}{A} + \ldots {}^{p}\overset{1}{C}\,{}^{f}\overset{m-p}{A} + \ldots + {}^{m}\overset{1}{C}\,{}^{f}\overset{\circ}{A})\,a^{g-1} $$

$$ + {}^{g}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,(\quad\quad {}^{2}\overset{2}{C}\,{}^{f}\overset{m-2}{A} + \ldots {}^{p}\overset{2}{C}\,{}^{f}\overset{m-p}{A} + \ldots + {}^{m}\overset{2}{C}\,{}^{f}\overset{\circ}{A})\,a^{g-2} $$

$$ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . $$

$$ + {}^{g}\overset{p}{\mathfrak{A}}\,(\quad\quad\quad\quad {}^{p}\overset{p}{C}\,{}^{f}\overset{m-p}{A} + \ldots + {}^{m}\overset{p}{C}\,{}^{f}\overset{\circ}{A})\,a^{g-p} $$

$$ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . $$

$$ + {}^{g}\overset{m}{\mathfrak{A}}\,(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad {}^{m}\overset{m}{C}\,{}^{f}\overset{\circ}{A})\,a^{g-m} $$

Die (p+1)te Scheitelreihe hierin ist

$$ {}^{f}\overset{m-p}{A}\,({}^{g}\overset{\circ}{\mathfrak{A}}\,{}^{p}\overset{\circ}{C}\,a^{g} + {}^{g}\overset{1}{\mathfrak{A}}\,{}^{p}\overset{1}{C}\,a^{g-1} + {}^{g}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,{}^{p}\overset{2}{C}\,a^{g-2} + \ldots + {}^{g}\overset{p}{\mathfrak{A}}\,{}^{p}\overset{p}{C}\,a^{g-p}) $$

und nach der obigen Annahme

$$ = {}^{f}\overset{m-p}{A}\,.\,{}^{g}\overset{p}{A} $$

Führen wir nun statt p die Werthe o, 1, 2, ... m ein, so wird

$$^{f+g}\overset{m}{A} = {}^{f}\overset{m}{A}\,{}^{g}\overset{o}{A} + {}^{f}\overset{m-1}{A}\,{}^{g}\overset{1}{A} + {}^{f}\overset{m-2}{A}\,{}^{g}\overset{2}{A} + \ldots\ldots + {}^{f}\overset{o}{A}\,{}^{g}\overset{m}{A}$$

$^{f+g}\overset{m}{A}$ wird also eben so in ^{f}A und ^{g}A zerlegt als $^{f+g}\overset{m}{\mathfrak{A}}$ in $^{f}\mathfrak{A}$ und $^{g}\mathfrak{A}$. Wenden wir nun auf A eben dieselben Schlüfse an, welche oben bei $\mathfrak{A}$ vorkommen, so finden wir, dafs das Polynomium eben so gebildet wird, wenn n ein Bruch ist, als wenn es eine bejahete oder verneinte ganze Zahl ist.

Schneller würden wir zu diesem Resultate gekommen sein, wenn wir, nachdem die Allgemeinheit des Binomium

$$(a + z)^n = {}^{n}\overset{o}{\mathfrak{A}}\,a^n + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{A}}\,a^{n-1}\,z^1 + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,a^{n-2}\,z^2 + \ldots$$

gefunden war, statt z die Reihe

$$z = \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

eingeführt hätten, so wie es in §. 5. gezeigt ist. Allein ohne die obige Zerlegung würden wir glauben, dafs die Allgemeinheit des Polynomiums von jener des Binomiums abhänge, wovon, wie hier zuerst gezeigt ist, sich das Gegentheil bewährt hat.

Allgemeine Gesetze des Binomiums und Polynomiums.

Da die Rechnungen verwickelter werden, so werden zur Erleichterung des Drucks die Glieder des Binomiums auf folgende Art bezeichnet:

$$(a+b)^n = k(n,1) \cdot a^n + k(n,2) \cdot a^{n-1}b^1 + \ldots k(n,p) \cdot a^{n-p+1}b^{p-1} + \ldots$$

und des Polynomiums

$$(a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots)^n = P^n = P^n v1 . x^n + P^n v2 . x^{n+1} + \ldots + P^n vq . x^{n+q-1} + \ldots$$

§. 17.

So verschieden auch die Bedeutung ist, welche den Zeichen $(a+b)^n$ unterliegt, je nachdem n bejahend oder verneinend oder ein Bruch ist, so werden doch die verschiedenen Geschäfte, welche durch dieselben angekündigt werden, auf gleiche Art ausgeführt, welches, wenn es uns nicht schon bekannt wäre, beweisen würde, dafs jene verschiedenen Geschäfte einer allgemeinen Idee unterworfen werden können. Nach dieser Idee betrachten wir

$$(a+b)^{+n},\ (a+b)^{-n},\ (a+b)^{\mp\frac{p}{q}}$$

als Glieder einer Reihe, in welcher dieselben durch gleiche Faktoren gebildet werden und $(a+b)^{+n}$, $(a+b)^{-n}$ die Hauptglieder, und $(a+b)^{\mp\frac{p}{q}}$ die Zwischenglieder sind. Wenn wir nicht in den §en 15 und 16 auf besondern Wegen gefunden hätten, dafs die Bildung dieser Zwischenglieder denselben Gesetzen unterworfen ist, nach welchen die Hauptglieder gebildet werden, so würde uns schon diese Idee zu solcher Behauptung berechtigen; denn dadurch, dafs eine Grösse ein Glied einer Reihe seyn soll, mufs sie auch den allgemeinen Gesetzen der ganzen Reihe huldigen, und nur

unter dieser Bedingung kann sie als Glied der Reihe auftreten. Dasselbe gilt von dem Polynomium

$$(a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots)^n$$

Aber hier müssen wir bemerken, dafs sich diese Behauptung nicht auf jede Bildungsweise ausdehnt; wir unterscheiden die besondern Gesetze, welchen gewisse Glieder, von den allgemeinen, welchen alle Hauptglieder unterworfen sind.

Jetzt, da wir sowohl durch besondere Beweise, als durch diese Betrachtungen sicher sind, dafs keine Eigenschaft des n die Allgemeinheit der Gleichung

$$29) \quad P^n v(m+1) = k(n,1) \cdot a^n \cdot {}^m\overset{0}{C} + k(n,2) \cdot a^{n-1} \cdot {}^m\overset{1}{C}$$
$$+ k(n,3) \cdot a^{n-2} \cdot {}^m\overset{2}{C} + \ldots + k(n,m+1) \cdot a^{n-m} \cdot {}^m\overset{m}{C}$$
$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots)$$
$$P = a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots$$

stört, jetzt können wir auch allgemeine Mittel und Wege aufsuchen, um das Bildungsgeschäft der spätern Glieder des Polynomiums zu erleichtern. Zuerst bemerken wir, dafs, so lange wir die Verbindungen der Elemente $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots$ zur Summe m, durch ${}^m\overset{1}{C}, {}^m\overset{2}{C}, \ldots, {}^m\overset{m}{C}$ vorgestellt, nur an und für sich betrachten, die vorstehende Gleichung die unabhängige Bildungsweise des Polynomiums angiebt. Betrachten wir aber die Verbindungen, unter ${}^m\overset{q}{C}$ begriffen, als ein Glied des Polynomiums

$$U^q = (\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots)^q = {}^q\overset{q}{C}x^q + {}^{q+1}\overset{q}{C}x^{q+1} + \ldots$$
$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots)$$
$$= U^q v1 \cdot x^q + U^q v2 \cdot x^{q+1} + U^q v3 \cdot x^{q+2} + \ldots$$

so geht die Gleichung 29 in folgende über:

$$30) \quad P^n v(m+1) = k(n,1) \cdot U^0 v(m+1) \cdot a^n + k(n,2) \cdot U^1 vm \cdot a^{n-1}$$
$$+ k(n,3) \cdot U^2 v(m-1) \cdot a^{n-2} + \ldots + k(n,m+1) \cdot U^m v1 \cdot a^{n-m}$$

welche nun nicht mehr die unabhängige Bildungsweise des Polynomiums

angiebt, sondern zeigt, wie das (m+1)te Glied des Polynomiums

$$P^n = (a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots\ldots)^n$$

wo n jede mögliche Zahl bedeutet, aus dem

1sten, 2ten, 3ten,. . . . . (m+1)ten Gliede

des Polynomiums U^m, U^{m-1}, U^{m-2}, ... U^{m-m}

wo $U = \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots\ldots$ ist, gebildet wird, und also die Bildung eines Polynomiums einer Reihe auf die Bildung des Polynomiums der verkürzten Reihe zurückführt.

§. 18.

Wir wollen diesen Unterschied der Reihen aufheben, und uns die Frage vorlegen: wie kann irgend eine Potenz sowohl bejahte als verneinte und gebrochene Potenz einer Reihe aus Gliedern schon gebildeter bejahten Potenzen derselben Reihe zusammen gesetzt werden?

Die Lösung dieser Aufgabe beginnt mit der Zurückführung der bejaheten Potenzen der verkürzten Reihe auf die bejaheten Potenzen der vollständigen Reihe. Es ist nämlich:

$$U^q = (P - a)^q = k(q,1) \cdot P^q - k(q,2) \cdot P^{q-1} \cdot a^1 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (-)^h , k(q,h+1) \cdot P^{q-h} \cdot a^h + \ldots\ldots$$

Führen wir nun in dieses Binomium die verschiedenen Potenzen von P, begriffen in der allgemeinen Form

$$P^{q-h} = P^{q-h}v1 + P^{q-h}v2 \cdot x^1 + P^{q-h}v3 \cdot x^2 + \ldots\ldots$$

ein, so gewinnen wir folgende Entwicklung:

$$U^q = k(q,1).P^q v1 + k(q,1) \cdot P^q v2.x^1 + k(q,1).P^q v3. x^2 + \ldots$$
$$-k(q,2).P^{q-1}v1.a^1 - k(q,2) \cdot P^{q-1} v2.a^1 - k(q,2).P^{q-1}v3.a^1 - \ldots$$
$$+k(q,3).P^{q-2}v1 .a^2 + k(q,3) \cdot P^{q-2}v2.a^2 + k(q,3).P^{q-2}v3.a^2 + \ldots$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad - \quad . \quad ; \quad . \quad - \quad . \quad . \quad . \quad - \ldots$$

Durch diese Entwicklung kann nichts anders gewonnen werden, als das, was das Vervielfachen von

$U^q = (\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \ldots)^q = U^q v\,1 \,.\, x^q + U^q v\,2 \,..x^{q+1} + \ldots.$

hervorbringt; da also keine niedrigere Potenzen von x vorkommen, als x^q und alle Vorzahlen, welche von x^{q-s} begleitet sind, verschwinden, so ist

$U^q v\,1 = k(q,1) \,.\, P^q v(q+1) - k(q,2) \,.\, P^{q-1} v(q+1) a^1 +$
$+ k(q,3) \,.\, P^{q-2} v(q+1) \,.\, a^2 - \ldots. (-)^q . k(q,q+1) . P^o v(q+1) \,.\, a^q$
$U^q v\,2 = k(q,1) \,.\, P^q v(q+2) - k(q,2) \,.\, P^{q-1} v(q+2) \,.\, a^1 +$
$+ k(q,3) \,.\, P^{q-2} v(q+2) \,.\, a^2 - \ldots. (-)^q . k(q,q+1) . P^o v(q+2)\, a^q$
. . . . . .
$U^q v h = k(q,1) \,.\, P^q v(q+h) - k(q,2) \,.\, P^{q-1} v(q+h) \,.\, a^1 +$
$+ k(q,3) \,.\, P^{q-2} v(q+h) \,.\, a^2 - \ldots. (-)^q . k(q,q+1) . P^o v(q+h) . a^q$

Diese Gleichungen sind das Mittel, die Glieder der verkürzten Reihe aus obiger Gleichung 30 durch Glieder der vollständigen Reihe zu ersetzen; führen wir wirklich diese Werthe von U^q in die Gleichung 30 ein, so geht sie in folgende über:

$P^n v(m+1) = k(n,1) . k(o,1) \,.\, P^o v(m+1) . a^n$
$+ k(n,2) . [k(1,1) . p^1 v(m+1) - k(1,2) . P^1 v(m+1) . a^1] . a^{n-1}$
$+ k(n,3) . [k(2,1) . P^2 v(m+1) - k(2,2) . P^1 v(m+1) . a^1 +$
$+ k(2,3) \,.\, P^o v(m+1) \,.\, a^2] \,.\, a^{n-2}$
$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$
$+ k(n,m+1) \,.\, [k(m,1) \,.\, P^m v(m+1) -$
$- k(m,2) . P^{m-1} v(m+1) . a^1 + k(m,3) . P^{m-2} v(m+1) . a^2 - \ldots$
$\ldots (-)^m \,.\, k(m,m+1) \,.\, P^o v(m+1) \,.\, a^m] \,.\, a^{n-m}$

und diese wieder durch Trennung der Glieder des Binomiums von jenen des Polynomiums in folgende

$P^n v(m+1) = k(n,m+1) \,.\, k(m,1) \,.\, P^m v(m+1) \,.\, a^{n-m}$
$+ [k(n,m) \,.\, k(m-1,1) - k(n,m+1) \,.\, k(m,2)]$
$. P^{m-1} v(m+1) \,.\, a^{n-m+1}$
$+ [k(n,m-1) \,.\, k(m-2,1) - k(n,m) . k(m-1,2)$
$+ k(n,m+1) \,.\, k(m,3)] \,.\, P^{m-2} v(m+1) \,.\, a^{n-m+2}$
$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$

$$+ [k(n,1).k(0,1) - k(n,2).k(1,2) + k(n,3).k(2,3) - \ldots$$
$$\ldots (-)^m . k(n,m+1) . k(m,m+1)] . P^0 v(m+1) . a^n$$

Die verschiedenen Produkte der Glieder des Binomiums können wir vereinigen; wir setzen

$$k(n,m-p+1) . k(m-p,1) - k(n,m-p+2).k(m-p+1,2)$$
$$+ k(n,m-p+3) . k(m-p+2,3) - \ldots .$$
$$\ldots (-)^p . k(n,m+1) . k(m,p+1)$$
$$= \alpha(m,p)$$

also

$$P^n v(m+1) = \alpha(m,0) . P^m v(m+1) . a^{n-m} +$$
$$+ \alpha(m,1) . P^{m-1} v(m+1) . a^{n-m+1}$$
$$+ \ldots + \alpha(m,p) . P^{m-p} v(m+1) . a^{n-m+p} + \ldots .$$
$$\ldots + \alpha(m,m) . P^0 v(m+1) . a^n$$

und leiten jedes folgende $\alpha(m,p+1)$ aus dem vorhergehenden $\alpha(m,p)$ auf folgende Art ab:

$$\alpha(m,0) = k(n,m+1) . k(m,1)$$
$$\alpha(m,1) = \alpha(m-1,0) - k(n,m+1) . k(m,2)$$
$$\alpha(m,2) = \alpha(m-1,1) + k(n,m+1) . k(m,3)$$
$$\alpha(m,3) = \alpha(m-1,2) - k(n,m+1) . k(m,4)$$
$$\alpha(m,4) = \alpha(m-1,3) + k(n,m+1) . k(m,5)$$
. . . . . .
$$\alpha(m,p+1) = \alpha(m-1,p) + (-)^{p+1} . k(n,m+1) . k(m,p+2)$$

Nehmen wir die Geschäfte wirklich vor, welche hier durch Zeichen angezeigt sind, und setzen $k(n-m-1,1)$ statt $k(m,1)$, so erhalten wir

$$\alpha(m,0) = k(n,m+1) . k(n-m-1,1)$$
$$\alpha(m,1) = k(n,m) . k(n-m,1) - k(n,m+1) . k(m,2)$$
$$= k(n,m) . k(n-m,1) . (1 - \tfrac{n-m+1}{1}) = -k(n,m) . k(n-m,2)$$
$$\alpha(m,2) = -k(n,m-1) . k(n-m+1,2) + k(n,m+1) . k(m,3)$$
$$= -k(n,m-1) . k(n-m+1,2) . (-\tfrac{n-m+2}{2}) =$$
$$= +k(n,m-1) . k(n-m+1,3)$$

$$\alpha(m,3) = + k(n,m-2) \cdot k(n-m+2,3) - k(n,m+1) \cdot k(m,4)$$
$$= k(n,m-2) \cdot k(n-m+2,3) \cdot (1 - \tfrac{n-m+3}{3}) =$$
$$= - k(n,m-2) \cdot k(n-m+2,4)$$

Die Produkte, welche hier entstehen, werden auf gleiche Weise hervorgebracht, befolgen also auch gemeinsame Gesetze; jedes Produkt besteht aus zweien Theilen, wovon der eine Theil durch Einführung von $m-1$ statt m einen Faktor verliert und der andere Theil durch Zutritt eines neuen Produkts einen neuen Faktor gewinnt. Der Uebergang von

$$\alpha(m,p) = (-)^p \cdot k(n,m-p+1) \cdot k(n-m+p-1,p+1)$$

zu dem folgenden $\alpha(m,p+1)$ geschieht nach obiger Vorschrift durch Einführung von $m-1$ statt m und durch Zuzählen eines neuen Produkts, so, dafs

$$\alpha(m,p+1) = (-)^p \cdot k(n,m-p) \cdot k(n-m+p,p+1) +$$
$$+ (-)^{p+1} \cdot k(n,m+1) \cdot k(m,p+2)$$

Sondern wir hier die gemeinsamen Faktoren, so wird

$$\alpha(m,p+1) = (-)^p \cdot k(n,m-p) \cdot k(n-m+p,p+1) \cdot (1 - \tfrac{n-m}{p+1} \tfrac{+p+1}{+1})$$

Die eingeklammerten Gröfsen $= - \frac{n-m}{p+1}$ vereinigen sich mit dem zweiten Produkte und es wird

$$\alpha(m,p+1) = (-)^{p+1} \cdot k(n,m-p) \cdot k(n-m+p,p+2)$$

Setzen wir nun in dieser Gleichung statt p die Werthe $0, 1, 2, \ldots m-1$ so entsteht die Gleichung

$$31) \quad P^n v(m+1) = k(n,m+1)\, k(n-m-1,1) \cdot P^m v(m+1) \cdot a^{n-m}$$
$$- k(n,m) \cdot k(n-m,2) \cdot P^{m-1} v(m+1) \cdot a^{n-m+1} +$$
$$+ k(n,m-1) \cdot k(n-m+1,3) \cdot P^{m-2} v(m+1)\, a^{n-m+2}$$
$$\ldots (-)^p k(n,m-p+1) \cdot k(n-m+p-1,p+1) \cdot P^{m-p} v(m+1) \cdot a^{n-m+p}$$
$$\ldots (-)^m k(n,1) \cdot k(n-1,m+1) \cdot P^0 v(m+1) \cdot a^n$$

welche zeigt, wie aus den ersten bejaheten Potenzen einer Reihe alle übrigen, sowohl bejaheten als verneinten und gebrochenen Potenzen derselben Grundreihe, gebildet werden können. Diese zurücklaufende Bildungsweise kann leicht in die unabhängige umgewandelt werden.

§. 19.

Die obige Bemerkung, dafs nämlich die Gleichung 31 jede Potenz, sowohl die bejahete als verneinte und gebrochene, auf die früheren bejaheten Potenzen derselben Reihe zurückführt, giebt wieder Anlafs zu einer neuen Untersuchung: Wie können verneinte Potenzen einer Reihe aus früheren verneinten, wie gebrochene Potenzen einer Reihe aus früheren gebrochenen und überhaupt, wie kann eine Potenz einer Reihe aus anderen Potenzen derselben Reihe gebildet werden?

Wir finden, wie auch schon in § 6. für bejahete Potenzen gezeigt ist, dafs allgemein für jedes mögliche n das Vervielfachen der Reihen

$$(U^n v\,1 + U^n v\,2 \,.\, x^1 + U^n v\,3 \,.\, x^2 + U^n v\,4 \,.\, x^3 + \ldots)\ (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} x + \overset{3}{a} x^2 + \overset{4}{a} x^3 + \ldots)$$

zu der nächst höheren Potenz

$$U^{n+1} v\,1 + U^{n+1} v\,2 \,.\, x^1 + U^{n+1} v\,3 \,.\, x^2 + U^{n+1} v\,4 \,.\, x^3 \ldots$$

führt, und dafs allgemein die Gleichung

$$32)\quad U^{n+1} v\,(m+1) = \overset{1}{a} \,.\, U^n\,(m+1) + \overset{2}{a} \,.\, U^n\, v\, m + \overset{3}{a} \,.\, U^n\, v\,(m-1) + \ldots\ldots + \overset{m+1}{a} \,.\, U^n\, v\,1$$

jede Potenz der Grundreihe auf die unmittelbar vorhergehende Potenz zurückführt. Bei dieser einfachen Gleichung bleiben wir hier nicht stehen und suchen allgemeinere Vorschriften als diese angibt. Wir gewinnen solche wenn wir bei den Versetzungen die Summe der Stellenzahlen jeder Scheitelreihe in Betracht ziehen. Hiebei müfsen wir von der Bemerkung ausgehen, dafs bei Versetzungen

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ a & a & a & a \end{matrix}\ .$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ a & a & a & a \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{matrix}$$

die Stellenzahlen sich so oft wiederholen, als Versetzungen möglich sind. Im vorstehenden Falle ist die Summe der Stellenzahlen jeder Verbindung 6, und die Versetzungszahl $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; die Summe sämmtlicher Stellenzahlen in allen Versetzungen ist also $6 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Da nun in jeder Scheitelreihe dieselben Stellenzahlen sind, so beträgt die Summe aller Stellenzahlen in jeder Scheitelreihe

$$\frac{6 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{6}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Wenn nun jeder Verbindung die Stellenzahl ihres Anfangselements als Faktor vorgesetzt wird

$$\begin{array}{l} {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ 3} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} {\scriptstyle 1\ 1\ 3\ 1} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} {\scriptstyle 1\ 3\ 1'\ 1} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} {\scriptstyle 3\ 1\ 1\ 1} \\ 3 \cdot a\ a\ a\ a \end{array}$$

so entsteht hiedurch die erste geordnete Verbindung $\overset{1}{a}\ \overset{1}{a}\ \overset{1}{a}\ \overset{3}{a}$, $\frac{6}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ mal, aber alle Verbindungen nur $\frac{6}{4}$ mal. Dieses gilt nicht allein von dieser Verbindung, sondern auch von jeder anderen Verbindung zu vier Elementen zur Summe 6, nämlich von $\overset{1}{a}\ \overset{1}{a}\ \overset{2}{a}\ \overset{2}{a}$. Es ist also

$$\begin{array}{l} {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ 3} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 1\ 2\ 2} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 1\ 3\ 1} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 2\ 1\ 2} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 2\ 2\ 1} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 3\ 1\ 1} \\ 1 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 1\ 1\ 2} \\ 2 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 1\ 2\ 1} \\ 2 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 2\ 1\ 1} \\ 2 \cdot a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 3\ 1\ 1\ 1} \\ 3 \cdot a\ a\ a\ a \end{array} = 1 \cdot \overset{1}{a} \left| \begin{array}{l} {\scriptstyle 1\ 1\ 2} \\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 2\ 2} \\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 3\ 1} \\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 1\ 2} \\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 2\ 1} \\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 3\ 1\ 1} \\ a\ a\ a \end{array} \right. + 2 \cdot \overset{2}{a} \left| \begin{array}{l} {\scriptstyle 1\ 1\ 2} \\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 2\ 1} \\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 1\ 1} \\ a\ a\ a \end{array} \right. + 3 \cdot \overset{3}{a} \cdot a\ a\ a = \frac{6}{4} \left| \begin{array}{l} {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ 3} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 1\ 2\ 2} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 1\ 3\ 1} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 2\ 1\ 2} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 2\ 2\ 1} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 1\ 3\ 1\ 1} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 1\ 1\ 2} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 1\ 2\ 1} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 2\ 2\ 1\ 1} \\ a\ a\ a\ a \\ {\scriptstyle 3\ 1\ 1\ 1} \\ a\ a\ a\ a \end{array} \right.$$

Ueberhaupt wird jeder Verbindung, begriffen in

$$\overset{n+x}{{}_{n+m+1}C}$$

$$(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a},\ .\ .\ .)$$

die Stellenzahl ihres Anfangselements vorgesetzt, so ist, wenn M, N, P, ... die Versetzungszahlen sind, die Summe der Stellenzahlen jeder Scheitelreihe, oder die Summe der Zahlen, welche den Verbindungen als Faktoren vorgesetzt werden

$$\frac{n+m+1}{n+1}\,.\,(M+N+P+\ldots)$$

Eben so oft ist jede geordnete Verbindung vorhanden, aber jede Verbindung mit ihren Versetzungen nur $\frac{n+m+1}{n+1}$ mal; in Zeichen

33) $$\frac{n+m+1}{n+1}\,.\,{}^{n+1}_{n+m+1}C = 1\,.\,\overset{1}{a}\,.\,{}^{n}_{n+m}C + 2\,.\,\overset{2}{a}\,.\,{}^{n}_{n+m-1}C + 3\,.\,\overset{3}{a}\,{}^{n}_{n+m-2}C + \ldots$$
$$\ldots + (m+1)\,.\,\overset{m+1}{a}\,{}^{n}_{n+m-m}C$$

$$(\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a},\ \overset{4}{a},\ .\ .\ .)$$

oder

34) $$\frac{n+m+1}{n+1}\,.\,U^{n+1}\,v\,(m+1) = 1\,.\,\overset{1}{a}\,.\,U^{n}\,v\,(m+1) + 2\,.\,\overset{2}{a}\,.\,U^{n}\,v\,m$$
$$+ 3\,.\,\overset{3}{a}\,.\,P^{n}\,v\,(m-1) + \ldots + (m+1)\,.\,\overset{m+1}{a}\,.\,U^{n}\,v\,1$$

Diese Gleichung ist darin von 32 verschieden, dafs die Produkte noch die Faktoren 1, 2, 3, ... m + 1 haben, welche ihnen in jener mangeln. Beide geben in Vereinigung eine umfassendere Gleichung; denn vervielfachen wir die Gleichung 32 mit $\alpha - \beta$ und die Gleichung 34 mit β, und zählen beide zusammen, so entsteht eine neue Gleichung.

35) $$\alpha\,.\,\overset{1}{a}\,U^{n}\,(m+1) + (\alpha+1\beta)\,.\,\overset{2}{a}\,.\,U^{n}\,v\,m + (\alpha+2\beta)\,.\,\overset{3}{a}\,.\,U^{n}\,v\,(m-1)$$
$$+ \ldots + (\alpha+m\beta)\,\overset{m+1}{a}\,.\,U^{n}\,v\,1 = \frac{\alpha\,(n+1)+\beta\,m}{n+1}\,.\,U^{n+1}\,v\,(m+1)$$

welche beide Gleichungen 32 und 34 in sich begreift; setzen wir $\beta = 0$, so erhalten wir die erste, und setzen wir $\alpha = \beta = 1$, die zweite. Aber dadurch, dafs wir die willkürlichen Gröfsen α und β eingeführt haben, haben wir eine Gleichung von gröfserer Ausdehnung erhalten, als diejenigen sind, durch deren Vereinigung sie entstanden ist, denn nichts beschränkt die Gröfsen α und β.

§. 20.

Diese Gleichung gilt jedoch nur für bejahete ganze Potenzen der Grundreihe P; es ist noch übrig, sie für jede Potenz geltend zu machen. Hiebei müfsen wir von der Gleichung 30 ausgehen, deren Allgemeinheit sich schon bewährt hat; wir setzen in dieser Gleichung statt m die Zahlen

0, 1, 2, 3, ... m,

$$P^n v_1 = k(n,1).U^0 v_1 . a^n$$

$$P^n v_2 = k(n,1).U^0 v_2 . a^n + k(n,2).U^1 v_1 . a^{n-1}$$

. . . . . .

$$P^n v(p+1) = k(n,1).U^0 v(p+1).a^n + k(n,2).U^1 vp.a^{n-1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + k(n,p+1).U^p v_1 . a^{n-p}$$

$$P^p v(m+1) = k(n,1).U^0 v(m+1).a^n + k(n,2).U^1 vm.a^{n-1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + k(n,p+1).U^p v(m-p+1).a^{n-p} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + k(n,m+1).U^m v_1 . a^{n-m}$$

vervielfachen diese Gleichungen nach ihrer Folge mit

$$(\alpha+m\beta).\overset{m}{a},\ (\alpha+m\beta-\beta).\overset{m-1}{a},\ (\alpha+m\beta-2\beta).\overset{m-2}{a},\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (\alpha+2\beta).\overset{2}{a},\ (\alpha+1\beta).\overset{1}{a},\ \alpha a$$

und zählen diese sämmtlichen Gleichungen, mit vorstehenden Faktoren verbunden, zusammen. Die erste Scheitelreihe ist:

$$(\alpha+m\beta).\overset{m}{a}.P^n v_1 + (\alpha+m\beta-\beta).\overset{m-1}{a}.P^n v_2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots + (\alpha+\beta).\overset{1}{a}.P^n vm + \alpha.a.P^n v(m+1) \ldots\ldots M$$

wir nennen sie M. Die übrigen Scheitelreihen haben folgende Form:

$$k(n,p+1).[(\alpha+m\beta-p\beta).\overset{m-p}{a}.U^p v_1 + (\alpha+m\beta-p\beta+\beta).\overset{m-p-1}{a}.U^p v_2 + \ldots$$
$$\ldots + (\alpha+\beta).\overset{1}{a}.U^p v(m-p) + \alpha.a.U^p v(m-p+1)].a^{n-p} = N$$

Da in dieser Reihe p eine ganze bejahete Zahl ist, so können wir bei ihr von der Gleichung 35 Anwendung machen, wenn wir in 35 $\alpha = \alpha + \beta$, $\beta = \beta$, $n = p$ und $m = m - p - 1$ setzen. Wir erhalten hierdurch für diese Scheitelreihe

$$k(n,p+1)\cdot\left[\left(\alpha+\frac{m\beta}{p+1}\right).U^{p+1}v(m-p)+\alpha.a.Uv(m-p+1)\right].a^{n-p}=N$$

Die Summe aller Scheitelreihen zur Rechten des Gleichheitszeichens entsteht, wenn in dieser allgemeinen Form $p = 0, 1, 2, \ldots . m$ gesetzt wird, nämlich:

$$\left[\alpha\cdot k(n,2)+\left(\alpha+\frac{m\beta}{1}\right)\cdot k(n,1)\right]\cdot U^{1}vm\cdot a^{n}$$

$$+\left[\alpha\cdot k(n,3)+\left(\alpha+\frac{m\beta}{2}\right)\cdot k(n,2)\right]\cdot U^{2}v(m-1)\cdot a^{n-1}$$

$$+\left[\alpha\cdot k(n,4)+\left(\alpha+\frac{m\beta}{3}\right)\cdot k(n,3)\right]\cdot U^{3}v(m-2)\cdot a^{n-2}$$

$$+\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

$$+\left[\alpha.k(n,m+1)+\left(\alpha+\frac{m\beta}{m}\right)\cdot k(n,m)\right]\cdot U^{m}v1\cdot a^{n-m+1}$$

welche, da

$$\alpha\cdot k(n,p+1)+\left(\alpha+\frac{m\beta}{p}\right)\cdot k(n,p)=\left(\alpha+\frac{m\beta}{n+1}\right).k(n+1,p+1)$$

ist, folgende einfache Gestalt annimmt:

$$\left(\alpha+\frac{m\beta}{n+1}\right)\cdot\left[k(n+1,2).U^{1}vm.a^{n}+k(n+1,3).U^{2}v(m-1).a^{n-1}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+k(n+1,m+1)\cdot U^{m}v1\cdot a^{n-m+1}\right]$$

Diese eingeklammerte Reihe ist nach 30 das $(m+1)$te Glied der $(n+1)$ten Potenz der Reihe P; statt aller Scheitelreihen zur Rechten des Gleichheitszeichens setzen wir also:

$$\left.\alpha+\frac{m\beta}{n+1}\right)\cdot P^{n+1}v(m+1)$$

mithin ist die erste Scheitelreihe, oben vorgestellt durch M,

$$36)\quad \alpha\cdot a\cdot P^{n}v(m+1)+(\alpha+\beta)\cdot\overset{1}{a}.P^{n}vm+(\alpha+2\beta)\cdot\overset{2}{a}.P^{n}v(m-1)$$

$$+\ldots.+(\alpha+m\beta)\cdot\overset{m}{a}\cdot P^{n}v1=\left(\alpha+\frac{m\beta}{n+1}\right)\cdot P^{n+1}v(m+1)$$

Die Gleichung 36 bestätigt die Allgemeinheit der früher 35 schon aufgefundenen zurücklaufenden Bildungsweise. Wir können ihr aber noch eine

grössere Ausdehnung geben, wenn wir annehmen, dafs die Grundreihe

$$P = a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots$$

selbst schon eine Potenz einer andern Reihe

$$Q = b + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \overset{3}{b}x^3 + \ldots\ldots$$

nämlich $P = Q^f$ ist. Nehmen wir zugleich, da n und f jede mögliche Grösse vorstellen, an, dafs $n = \frac{g}{f}$ ist, und bemerken, dafs

$$P^n = Q^{nf} = Q^g \text{ und } P^{n+1} = Q^{nf+f} = Q^{g+f}$$

$$\text{also auch } P^n v m = Q^g v m \text{ und } P^{n+1} v m = Q^{g+f} v m$$

so können wir in obiger Gleichung

$$Q^f v 1,\ Q^f v 2,\ Q^f v 3, \ldots \text{ statt } a,\ \overset{1}{a},\ \overset{2}{a}, \ldots\ldots$$

$$Q^g v 1,\ Q^g v 2,\ Q^g v 3, \ldots \text{ statt } P^n v 1,\ P^n v 2,\ P^n v 3 \ldots$$

$$\text{und } Q^{f+g} v(m+1) \text{ statt } P^{n+1} v(m+1)$$

einführen, wodurch sie folgende allgemeinere Form gewinnt:

$$37)\ \alpha . Q^f v 1 . Q^g v(m+1) + (\alpha+\beta) . Q^f v 2 . Q^g v m + (\alpha+2\beta) . Q^f v 3 . Q^g v(m-1)$$

$$+ \ldots + (\alpha + m\beta) . Q^f v(m+1) . Q^g v 1 = (\alpha + \frac{m\beta f}{f+g}) \ . \ Q^{f+g} v(m+1)$$

Die Gleichung 36 enthält die Vorschrift, wie aus der niedrigen die unmittelbar höhere Potenz, letztere aber, wie aus irgend zweien Potenzen eine dritte Potenz derselben Grundreihe gebildet werden kann.

Die Grössen α und β, welche mit den Gliedern der Potenzen von Q verflochten sind, und nach Willkühr angenommen werden können, sind in vielen Fällen von grossem Nutzen. Durch diese wird es uns hier möglich, mit Leichtigkeit die Frage zu lösen: Wie wird ein späteres Glied aus den früheren Gliedern derselben Potenz gebildet? Denn wir nehmen die Grössen α und β so an, dafs der Faktor des Gliedes der höhern Potenz, welches in der Gleichung 37 vorkommt, verschwindet, nämlich dafs

$$\alpha + \frac{m\beta f}{f+g} = 0$$

wird. Hierdurch entsteht die Gleichung

38) $(mf - og) \cdot Q^f v1 \cdot Q^g v(m+1) + [(m-1)f - 1g] \cdot Q^f v2 \cdot Q^g vm$
$+ [(m-2)f - 2g] \cdot Q^f v3 \cdot Q^g v(m-1) + \ldots$
$\ldots + [(m-m)f - mg) \cdot Q^f v(m+1) \cdot Q^g v1 = o$

Diese Gleichung ist sehr allgemein, und umfafst auch diejenige, welche schon beim Messen gefunden ist, und hier entsteht, wenn $f = -g = n$ gesetzt wird.

§. 21.

In der allgemeinen Gleichung wächst der Faktor α um β, während die Potenzen f und g unverändert bleiben. Die Allgemeinheit der Gleichung wird gesteigert, wenn auch diese Potenzen f und g um eine dritte Grösse c, welche nach Willkühr angenommen werden kann, zu- oder abnehmen. Wir suchen eine solche Gleichung, und geben ihr folgende Gestalt:

$F(m+1) = P^f v1 \cdot P^g v(m+1) \cdot \varphi 1 + P^{f+c} v2 \cdot P^{g-c} vm \cdot \varphi 2 + \ldots$
$\ldots + P^{f+pc} v(p+1) \cdot P^{g-pc} v(m-p+1) \cdot \varphi(p+1) \ldots$
$\ldots + P^{f+mc} v(m+1) \cdot P^{g-mc} v1 \cdot \varphi(m+1)$

und fragen nun: wie müssen $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\ldots$ $\varphi(m+1)$ beschaffen seyn, wenn wir vermittelst der Hülfsmittel, welche uns bis jetzt bekannt sind, das $F(m+1)$ angeben wollen?

Wir setzen in dieser Gleichung $o, 1, 2, 3, \ldots$ statt m

$F1 = P^f v1 \cdot P^g v1 \cdot \varphi 1$

$F2 = P^f v1 \cdot P^g v2 \cdot \varphi 1 + P^{f+c} v2 \cdot P^{g-c} v1 \cdot \varphi 2$

$F3 = P^f v1 \cdot P^g v3 \cdot \varphi 1 + P^{f+c} v2 \cdot P^{g-c} v2 \cdot \varphi 2 + P^{f+2c} v3 \cdot P^{g-2c} v1 \cdot \varphi 3$

. . . . . .

$F(m+1) = P^f v1 \cdot P^g v(m+1) \cdot \varphi 1 + \ldots$
$\ldots + P^{f+mc} v(m+1) \cdot P^{g-mc} v1 \cdot \varphi(m+1)$

vervielfachen diese Gleichungen nach ihrer Folge mit

$\gamma \cdot P^h v(m+1), (\gamma + \delta) \cdot P^h vm, (\gamma + 2\delta) \cdot P^h v(m-1), \ldots$
$\ldots (\gamma + m\delta) \cdot P^h v1$

und zählen die Scheitelreihen zusammen. Die allgemeine Form aller Scheitelreihen zur Rechten des Gleichheitszeichens ist:

$$\varphi(p+1) \cdot P^{f+pc} v(p+1) \cdot [(\gamma + p\delta) \cdot P^{g-pc} v1 \cdot P^{h} v(m-p+1) +$$
$$+ (\gamma+p\delta+\delta) \cdot P^{g-pc} v2 \cdot P^{h} v(m-p) + \ldots + (\gamma+m\delta) \cdot P^{g-pc} v(m-p+1) \cdot P^{h} v1]$$

und die Summe einer solchen Reihe nach 37:

$$\frac{h\gamma+g(\gamma+m\delta)+p[h\delta-c(\gamma+m\delta)]}{h+g-pc} \cdot \varphi(p+1) \cdot P^{f+pc} v(p+1) \cdot P^{h+g-pc} v(m-p+1)$$

Setzen wir nun $h\gamma+g(\gamma+m\delta) = A$ und $h\delta - c(\gamma+m\delta) = B$; so ist die erste Scheitelreihe:

$$39) \quad \gamma \cdot P^{h} v(m+1) \cdot F1 + (\gamma+\delta) \cdot P^{h} vm \cdot F2 + (\gamma+2\delta) \cdot P^{h} v(m-1) \cdot F3 + \ldots$$
$$\ldots + (\gamma + m\delta) \cdot P^{h} v1 \cdot F(m+1) =$$
$$= \frac{A}{h+g} \cdot \varphi 1 \cdot P^{f} v1 \cdot P^{h+g} v(m+1) + \frac{A+1 \cdot B}{h+g-1c} \cdot \varphi 2 \cdot P^{f+c} v2 \cdot P^{h+g-c} vm +$$
$$+ \frac{A+2B}{h+g-2c} \cdot \varphi 3 \cdot P^{f+2c} v3 \cdot P^{h+g-2c} v(m-1) + \ldots,$$
$$\ldots + \frac{A+mB}{h+g-mc} \cdot \varphi(m+1) \cdot P^{f+mc} v(m+1) \cdot P^{h+g-mc} v1$$

Die letzte Reihe hat dieselbe Eigenschaft, als diejenige, welche wir uns vorgelegt haben. Um aber das φ und also auch F zu bestimmen, nehmen wir an, dafs $A = B = 0$; hierdurch wird $h = cm - g$ und $c\gamma = -g\delta$, wofür wir $c = -\delta$ und $\gamma = g$ setzen. Alle Glieder der letzten Reihe verschwinden ausser dem letzten, welches

$$(g - mc) \cdot \varphi(m+1) \cdot P^{f+mc} v(m+1) \cdot P^{g-mc} v1 \cdot P^{mc-g} v1 =$$
$$= (g - mc) \cdot \varphi(m+1) \cdot P^{f+mc} v(m+1)$$

ist. Es ist also

$$40) \quad g \cdot P^{mc-g} v(m+1) \cdot F1 + (g-c) \cdot P^{mc-g} vm \cdot F2 + \ldots$$
$$\ldots + (g-mc) \cdot P^{mc-g} v1 \cdot F(m+1) = (g-mc) \cdot \varphi(m+1) \cdot P^{f+mc} v(m+1)$$

Wir haben hier zwei ganz verschiedene Gröfsen $F(m+1)$ und $\varphi(m+1)$ nehmen wir die erstere an, so wird dadurch die zweite bestimmt, und umgekehrt. Wir nehmen die erstere an, und zwar so, dafs wir die erste Reihe

nach den Gleichungen, welche früher gefunden sind, summiren können Setzen wir daher

$$F(m+1) = P^s v(m+1)$$

so ist die Summe dieser Reihe nach 37

$$\frac{(s-g)(g-mc)}{s-g+mc} \cdot P^{s-g+mc} v(m+1)$$

und also

$$\frac{s-g}{s-g+mc} \cdot P^{s-g+mc} v(m+1) = \varphi(m+1) \cdot P^{f+mc} v(m+1)$$

mithin $s - g + mc = f + mc$ und $\varphi(m+1) = \frac{s-g}{s-g+mc}$

oder $s = f + g$ und $\varphi(m+1) = \frac{f}{f+mc}$

und $F(m+1) = P^{f+g} v(m+1)$

Es ist daher

41) $P^{f+g} v(m+1) = \frac{f}{f} \cdot P^f v\,1 \cdot P^g v(m+1) + \frac{f}{f+c} \cdot P^{f+c} v\,2 \cdot P^{g-c} v\,m + \frac{f}{f+2c} \cdot P^{f+2c} v\,3 \cdot P^{g-2c} v(m-1) + \ldots + \frac{f}{f+mc} \cdot P^{f+mc} v(m+1) \cdot P^{g-mc} v\,1$

Eine zweite Annahme von $F(m+1)$ führt uns zu einer allgemeineren Gleichung; wir setzen

$$F(m+1) = \frac{\alpha + m\beta}{g - mc} \cdot P^s v(m+1)$$

und erhalten dadurch nach 37 folgende Summe der Reihe 40

$$\frac{\alpha(s-g) + m(\beta s + \alpha c)}{s - g + mc} \cdot P^{s-g+mc} v(m+1)$$

und also durch Gleichsetzung der entsprechenden Gröfsen

$$s - g + mc = f + mc \text{ und } \varphi(m+1) = \frac{\alpha(s-g) + m(\beta s + \alpha c)}{(s-g+mc)(g-mc)}$$

oder $s = f + g$ und $\varphi(m+1) = \frac{\alpha f + m(\beta(f+g) + \alpha c)}{(f+mc)(g-mc)}$

und $F(m+1) = \frac{\alpha + m\beta}{g - mc} P^{f+g} v(m+1)$

oder wenn wir $\alpha = \frac{\alpha}{f}$ und $\beta = \frac{\beta f - \alpha c}{f(f+g)}$ setzen

$$\varphi(m+1) = \frac{\alpha + m\beta}{(f+mc)(g-mc)} \text{ und } F(m+1) = \frac{\alpha(f+g) + m(f\beta - \alpha c)}{f(f+g)(g-mc)} \cdot P^{f+g} v(m+1)$$

Die Endgleichung ist also

42) $$\frac{\alpha}{f.g}.P^{f}v\,1.P^{g}v(m+1)+\frac{\alpha+\beta}{(f+c)(g-c)}.P^{f+c}v\,2.P^{g-c}v\,m+$$

$$+\frac{\alpha+2\beta}{(f+2c)(g-2c)}.P^{f+2c}v\,3.P^{g-2c}v\,(m-1)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha+m\beta}{(f+mc)(g-mc)}.P^{f+mc}v\,(m+1).P^{g-mc}v\,1=$$

$$=\frac{\alpha(f+g)+m(\beta f-\alpha c)}{f(f+g)(g-mc)}.P^{f+g}v\,(m+1)$$

sie umfafst alle vorhergehenden Gleichungen dieser Art, es entsteht 41, wenn wir $\alpha = g$ und $\beta = -c$ setzen; nehmen wir noch an, dafs $g = -f$, so wird

43) $$\frac{P^{f}v1.P^{-f}v(m+1)}{f}+\frac{P^{f+c}v2.P^{-f-c}vm}{f+c}+\frac{P^{f+2c}v3.P^{-f-2c}v(m-1)}{f+2c}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{P^{f+mc}v(m+1).P^{-f-mc}v\,1}{f+mc}=0$$

Besteht die Grundreihe nur aus zweien Elementen, so erhalten wir die allgemeine zurücklaufende Bildungsweise der Glieder des Binomiums.

44) $$\frac{\alpha.k(f,1).k(g,m+1)}{f.g}+\frac{(\alpha+\beta).k(f+c,2).k(g-c,m)}{(f+c)(g-c)}+$$

$$+\frac{(\alpha+2\beta).k(f+2c,3).k(g-2c,m-1)}{(f+2\,2)(g-2\,c)}+\ldots+\frac{(\alpha+m\beta).k(f+mc,m+1).k(g-mc,1)}{(f+m\,c)(g-m\,c)}=$$

$$=\frac{[\alpha(f+g)+m(\beta f-\alpha c)].k(f+g,m+1)}{f(f+g)(g-mc)}$$

§. 22.

Wir legen uns eine zweite Reihe vor

$$(y.P^{f})v1.\varphi 1+(y.P^{f+c})v2.\varphi 2+(y.P^{f+2c})v3.\varphi 3+\ldots+(y.P^{f+mc})v(m+1).\varphi(m+1)=$$

$$=F(m+1)$$

wo sowohl y als P Reihen bedeuten, welche nach den Potenzen einer und derselben Grundgrösse fortgehen, nämlich:

$$y = yv1 + yv2 \cdot x^1 + yv3 \cdot x^2 + \ldots$$
$$P = Pv1 + Pv2 \cdot x^1 + Pv3 \cdot x^2 + \ldots$$

Wir suchen sowohl φ als auch F.

Wird $(y \cdot P^{f+pc})v(p+1)$ in seine Bestandtheile zerlegt, so wird

$$F(m+1) = \varphi 1.yv1.P^{f}v1$$
$$+\varphi 2(yv1.P^{f+c}v2+yv2.P^{f+c}v1)$$
$$+\varphi 3(yv1.P^{f+2c}v3+yv2.P^{f+2c}v2+yv3.P^{f+2c}v1)$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+\varphi(m+1).[yv1.P^{f+mc}v(m+1)+\ldots+yv(m+1).P^{f+mc}v1]$$

Die $(p+1)$te Scheitelreihe ist:

$$v(p+1) \cdot [\varphi(p+1) \cdot P^{f+pc}v1 + \varphi(p+2) \cdot P^{f+pc+c}v2 + \ldots$$
$$\ldots + \varphi(m+1) \cdot P^{f+mc}v(m-p+1)]$$

Soll diese eingeklammerte Reihe nach dem Vorhergehenden summirt werden, so müssen wir annehmen, dafs

$$\varphi(p+1) = \frac{\alpha + p\beta}{(f+pc)(g-pc)} \cdot P^{g-pc}v(m-p+1)$$

Hierdurch gewinnt die $(p+1)$te Scheitelreihe nach 42 folgende Summe:

$$\frac{\alpha(f+g)+p(\beta g+\alpha c)+m(\beta f-\alpha c)}{(f+g)(f+pc)(g-mc)} \cdot yv(p+1) \cdot P^{f+g}v(m-p+1)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$\alpha(f+g)+m(\beta f-\alpha c) = A, \beta g+\alpha c = B$ und $(f+g)(g-mc) = D$

so geht $F(m+1)$ über in

$$45) \quad \frac{\alpha}{f \cdot g} \cdot P^{g}v(m+1).(y.P^{f})v1 + \frac{\alpha+\beta}{(f+c)(g-c)} \cdot P^{g-c}vm' \cdot (y \cdot P^{f+c})v2 +$$
$$+\frac{\alpha+2\beta}{(f+2c)(g-2c)} \cdot P^{g-2c}v(m-1) \cdot (y \cdot P^{f+2c})v3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha+m\beta}{(f+mc)(g-mc)} \cdot P^{g-mc}v1 \cdot (y \cdot P^{f+mc})v(m+1)$$

$$= \frac{A}{f \cdot D} \cdot yv1 \cdot P^{f+g}v(m+1) + \frac{A+B}{(f+c)D} \cdot yv2 \cdot P^{f+g}vm + \frac{A+2B}{(f+2c)D} \cdot yv3 \cdot P^{f+g}v(m-1)$$

$$+ \ldots + \frac{A+mB}{(f+mc)D} \cdot yv(m+1) \cdot P^{f+g}v1$$

Nehmen wir an, dafs $A = f$ und $B = c$ ist, so ist

$$(f+g)(\alpha + m\beta) = f + mc$$

und da diese Gleichung für jedes m statt finden mufs, so ist auch

$$(f+g)\alpha = f \text{ und } (f+g)\beta = c \text{ oder } \alpha = \frac{f}{f+g} \text{ und } \beta = \frac{c}{f+g}$$

Werden diese Werthe in die Gleichung 45 geführt, so geht sie in folgende über:

46) $$\frac{1}{g} \cdot P^g v(m+1) \cdot (y \cdot P^f)v1 + \frac{1}{g-c} \cdot P^{g-c}vm \cdot (y \cdot P^{f+c})v2 +$$
$$+ \frac{1}{g-2c} \cdot P^{g-2c}v(m-1) \cdot (y \cdot P^{f+2c})v3 + \ldots + \frac{1}{g-mc} \cdot P^{g-mc}v1 \cdot (y \cdot P^{f+mc})v(m+1)$$
$$= \frac{1}{g-mc} \cdot (y \cdot P^{f+g})v(m+1)$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir, wenn wir $\alpha = f$ und $\beta = c$ setzen.

Setzen wir $\alpha = g$ und $\beta = -c$, so wird $A = D$ und $B = o$, und aus 45

47) $$\frac{1}{f} \cdot P^g v(m+1) \cdot (y \cdot P^f)v1 + \frac{1}{f+c} \cdot P^{g-c}vm \cdot (y \cdot P^{f+c})v2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{f+mc} \cdot P^{g-mc}v1 \cdot (y \cdot P^{f+mc})v(m+1) =$$
$$= \frac{1}{f} \cdot yv1 \cdot P^{f+g}v(m+1) + \frac{1}{f+c} \cdot yv2 \cdot P^{f+g}vm + \ldots + \frac{1}{f+mc} \cdot yv(m+1) \cdot P^{f+g}v1$$

Die Reihe, welche wir oben eingeklammert haben, läfst sich auch summiren, wenn wir annehmen, dafs

$$\varphi(p+1) = \frac{(z \cdot P^{g-pc+c})v(m-p+1)}{f+pc}$$

denn setzen wir in 46 $g = f+mc$, $f = g-mc+c$ und $m = m-p$, so wird die $(p+1)$te Scheitelreihe $= \frac{yv(p+1) \cdot (z\,P^{f+g+c})v(m-p+1)}{f+pc}$

mithin

$$48)\quad \frac{(yP^{f})v1.(zP^{g+c})v(m+1)}{f}+\frac{(yP^{f+c})v2.(zP^{g})vm}{f+c}+\frac{(yP^{f+2c})v3.(zP^{g-c})v(m-1)}{f+2c}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(yP^{f+mc})v(m+1).(zP^{g-mc+c})v1}{f+mc}=\frac{yv1.(z.P^{f+g+c})v(m+1)}{f}+\frac{yv2.(zP^{f+g+c})vm}{f+c}$$

$$+\ldots+\frac{yv(m+1).(zP^{f+g+c})v1}{f+mc}$$

Umkehrung der Reihen.

§. 23.

Wie wird die Grundgröfse x oder eine Potenz derselben in eine Reihe, geordnet nach den Potenzen des ursprünglichen Gebildes y, entwickelt?

Mit dieser Frage beschliefsen wir jetzt die Untersuchung der Polynomien; sie setzt zuletzt das Polynomium der Grundgröfse, nach welcher seine Entwickelung gereihet war, gegenüber, und macht das ganze Polynomium oder seine Entwickelung zur Grundgröfse und das vorige reihende Hauptelement zum Gebilde der neuen Grundgröfse. Sie läfst unbestimmt, was für ein Gebilde y ist, ob ein Polynomium einer oder mehrerer Reihen, sie nimmt y nur als Stellvertreterin einer Reihe

$$y = \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots \alpha$$

hebt aus der Reihe das reihende Element, und fodert die Entwickelung dieses Elements nach den Potenzen der ganzen Reihe durch y vorgestellt.

$$x = \overset{1}{b}y^1 + \overset{2}{b}y^2 + \overset{3}{b}y^3 + \ldots \beta$$

Dafs einer solchen Foderung Genüge geleistet werden könne, ist daraus einleuchtend, dafs, wenn wir von der Gleichung

$$x = \frac{1}{\overset{1}{a}}y - \frac{\overset{2}{a}}{\overset{1}{a}}x^2 - \frac{\overset{3}{a}}{\overset{1}{a}}x^3 - \ldots \gamma$$

ausgehen und ihre zweite Potenz statt x^2 einführen, die Reihe

$$x = \overset{1}{c}y + \overset{2}{c}y^2 + \overset{3}{c}x^3 + \overset{4}{c}x^4 + \ldots$$

entsteht, und dafs wieder durch Einführung der dritten Potenz dieser Reihe statt x auch dieses Glied heraustritt, und die Reihe

$$x = {}^{1}d\,y + {}^{2}d\,y^{2} + {}^{3}d\,y^{3} + {}^{4}d\,x^{4} + {}^{5}d\,x^{5} + \ldots$$

erzeugt und dafs auf diese Art durch Heraustreten der übrigen Glieder eine Reihe erzeugt werden kann, in welcher zur Rechten des Gleichheitszeichens nur die Potenzen von y vorkommen.

Dieser Versuch zeigt uns nicht allein die Möglichkeit der Auflösung unserer Aufgabe, sondern auch den Weg, welchen wir einschlagen würden, wenn uns nicht die vielen und mannichfaltigen Verbindungen, welche uns hier entgegen treten, nöthigten, den geraden Weg zu verlassen und vielmehr die Hindernisse zu umgehen, statt sie zu übersteigen.

Wir führen in die Gleichung

$$x = {}^{1}b\,y^{1} + {}^{2}b\,y^{2} + {}^{3}b\,y^{3} + \ldots + {}^{p}b\,y^{p} + \ldots$$

die Potenzen von

$$y = \overset{1}{a}x^{1} + \overset{2}{a}x^{2} + \overset{3}{a}x^{3} + \ldots$$

ein und erhalten dadurch eine identische Gleichung

$$x = \overset{1}{b}yv1 \cdot x^{1} + \overset{1}{b} \cdot yv2 \cdot x^{2} + \overset{1}{b} \cdot yv3 \cdot x^{3} + \ldots$$
$$\overset{2}{b} \cdot y^{2}v1 \cdot \quad \overset{2}{b} \cdot y^{2}v2$$
$$\overset{3}{b} \cdot y^{3}v1$$

welche nur bestehen kann, wenn die Vorzahlen von x^{1} gleich sind, und die Vorzahlen von den höheren Potenzen von x verschwinden

$$1 = \overset{1}{b}yv1$$
$$0 = \overset{1}{b} \cdot yv2 + \overset{2}{b} \cdot y^{2}v1$$
$$0 = \overset{1}{b} \cdot yv3 + \overset{2}{b} \cdot y^{2}v2 + \overset{3}{b} \cdot y^{3}v1$$

§. 24.

Die erste dieser Gleichungen bestimmt den Werth von yv1, die zweite von yv2, u. s. w., und alle geben die zurücklaufende Bildungsweise

der Glieder der verlangten Reihe, deren unabhängige Bildung aus der zurücklaufenden abgeleitet werden kann.

Dieses Verfahren führt leichter und schneller zum Ziele und gewährt eine grössere Allgemeinheit, als wir bis jetzt suchten. Wir nehmen daher die m te Potenz einer Reihe schon entwickelt nach den Potenzen von x an:

$$y^m = Pv1 \cdot x^s + Pv2 \cdot x^{s+d} + Pv3 \cdot x^{s+2d} + \ldots = P$$

und fragen nun nach der nten Potenz von x in einer Reihe, geordnet nach den Potenzen von y,

$$x^n = Qv1 \cdot y^{\alpha(1)} + Qv2 \cdot y^{\alpha(2)} + Qv3 \cdot y^{\alpha(3)} + \ldots = Q$$

In dieser Reihe sind sowohl $\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \ldots$ oder $\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots$ als auch die Vorzahlen $Qv1, Qv2, \ldots$ unbekannt. Wir suchen zuerst die $\alpha 1, \alpha 2, \ldots$ und finden sie gleich in der Zusammenstellung der Glieder der Reihen, welche vereinigt werden müssen; diese sind, da

$$y^h = (y^m)^{\frac{h}{m}} = P^{\frac{h}{m}} = P^{\frac{h}{m}} v1 . x^{\frac{sh}{m}} + P^{\frac{h}{m}} v2 . x^{\frac{sh}{m}+d} + P^{\frac{h}{m}} v3 . x^{\frac{sh}{m}+2d} + \ldots$$

ist, folgende:

$$x^n = Qv1\left(P^{\frac{\alpha 1}{m}} v1 . x^{\frac{s\alpha 1}{m}} + P^{\frac{\alpha 1}{m}} v2 . x^{\frac{s\alpha 1}{m}+d} + P^{\frac{\alpha 1}{m}} v3 . x^{\frac{s\alpha 1}{m}+2d} \ldots\right.$$

$$+ Qv2\left(P^{\frac{\alpha 2}{m}} v1 . x^{\frac{s\alpha 2}{m}} + P^{\frac{\alpha 2}{m}} v2 . x^{\frac{s\alpha 2}{m}+d} \ldots\right.$$

$$+ Qv3\left(P^{\frac{\alpha 3}{m}} v1 . x^{\frac{s\alpha 3}{m}} \ldots\right.$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wir werden dem Gleichheitszeichen Genüge leisten, wenn wir wenigstens eine der Potenzen von x dem n gleich setzen, diese sey:

$$n = \frac{s\alpha 1}{m}$$

Zwischen den übrigen nehmen wir folgende Beziehungen an:

$$\frac{s\alpha 2}{m} = \frac{s\alpha 1}{m} + d$$

$$\frac{s\alpha 3}{m} = \frac{s\alpha 2}{m} + d = \frac{s\alpha 1}{m} + 2d$$

. . . . . .

$$\frac{s\alpha p}{m} = \frac{s\alpha(p-1)}{m} + d = \frac{s\alpha(p-2)}{m} + 2d = \ldots = \frac{s\alpha 1}{m} + (p-1)d$$

welche zu folgenden Werthen der α führen:

$$\alpha 1 = \frac{m.n}{s},\ \alpha 2 = \frac{m.n + m.d}{s},\ \ldots,\ \alpha p = \frac{m.n + (p-1)md}{s}$$

Die obige Entwicklung von x^n geht hierdurch in folgende über:

$$x^n = Qv1 . P^{\frac{n}{s}} v1 . x^n + Qv1.P^{\frac{n}{s}} v2.x^{n+d} + Qv1.P^{\frac{n}{s}} v3 . x^{n+2d} + \ldots$$
$$Qv2.P^{\frac{n+d}{s}} v1 \qquad Qv2.P^{\frac{n+d}{s}} v2$$
$$Qv3.P^{\frac{n+2d}{s}} v1$$

Da diese Gleichung nicht bestehen kann, ohne dafs die Vorzahlen von gleich hohen Potenzen von x gleich sind, so erhalten wir eben so viele Gleichungen als Grössen vorhanden sind, deren Werthe gesucht werden, nämlich:

49) $$1 = Qv1.P^{\frac{n}{s}} v1$$

$$0 = Qv1.P^{\frac{n}{s}} v2 + Qv2.P^{\frac{n+d}{s}} v1$$

$$0 = Qv1.P^{\frac{n}{s}} v3 + Qv2.P^{\frac{n+d}{s}} v2 + Qv3.P^{\frac{n+2d}{s}} v$$

. . . . . .

$$0 = Qv1.P^{\frac{n}{s}} vp + Qv2.P^{\frac{n+d}{s}} v(p-1) + \ldots Qvp . P^{n+pd-d} v1$$

§. 25.

Diese Gleichuugen enthalten die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen $Qv1$, $Qv2$, $Qv3$, . . . Wir können aus ihr, wenn wir eine der allgemeinen Gleichungen zwischen den Vorzahlen verschiedener Polynomien zu Hülfe nehmen, leicht die unabhängige Bildungsweise herleiten. Setzen wir nämlich in 43, $f = -\frac{n}{s}$, $c = -\frac{d}{s}$, $m = p - 1$, und vervielfachen die Gleichung durch $-\frac{n}{s}$, so nimmt sie für gegenwärtigen Zweck folgende Gestalt an

$$\frac{n}{n} \cdot P^{-\frac{n}{s}v1} \cdot P^{+\frac{n}{s}vp} + \frac{n}{n+d} \cdot P^{-\frac{n+d}{s}v2} \cdot P^{+\frac{n+d}{s}v(p-1)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{n+pd-d} \cdot P^{-\frac{n+pd-d}{s}vp} \cdot P^{+\frac{n+pd-d}{s}v1} = 0$$

Aus der ersten Gleichung in 49 erhalten wir:

$$Qv1 = \frac{1}{P^{\frac{n}{s}v1}} = (a)^{-\frac{n}{s}} = \frac{n}{n} \cdot P^{-\frac{n}{s}v1}$$

Wird dieser Werth in die darauf folgende zweite Gleichung eingeführt, so geht sie in folgende über:

$$\frac{n}{n} \cdot P^{-\frac{n}{s}v1} \cdot P^{+\frac{n}{s}v2} + Qv2 \cdot P^{+\frac{n+d}{s}v1} = 0$$

und die obige Hülfsgleichung, wenn $p = 2$ angenommen wird, in

$$\frac{n}{n} \cdot P^{-\frac{n}{s}v1} \cdot P^{+\frac{n}{s}v2} + \frac{n}{n+d} \cdot P^{-\frac{n+d}{s}v2} \cdot P^{+\frac{n+d}{s}v1} = 0$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen führt unmittelbar zu dem Werthe von $Qv2$

$$Qv2 = \frac{n}{n+d} \cdot P^{-\frac{n+d}{s}v2}$$

Werden diese gefundenen Werthe von $Qv1$ und $Qv2$ in die darauf folgende dritte Gleichung von 49 eingeführt, und wird in der Hülfsgleichung $p = 3$ gesetzt, so giebt die Verbindung der beiden Gleichungen die folgende Vorzahl:

$$Qv3 = \frac{n}{n+2d} \cdot P^{-\frac{n+2d}{s}v3}$$

Der unveränderte Gang, welchen das Aufsuchen der Vorzahlen angenommen hat, führt durch gleichartige Gebilde wieder zu Gebilden gleicher Art. Durch Einführung der schon gefundenen Vorzahlen in die Gleichung 49 entsteht eine Gleichung, welche sich nur durch das letzte Produkt von der Hülfsgleichung unterscheidet und mit dieser die folgende Vorzahl

$$50) \quad Qv(p+1) = \tfrac{n}{n+pd} \cdot P^{-\frac{n+pd}{s}} v(p+1)$$

erzeugt. Wenn also

$$y^m = \overset{1}{a}x^s + \overset{2}{a}x^{s+d} + \ldots \overset{q}{a}x^{s+qd-d} + \ldots\ldots P$$

ist, so ist die umgekehrte Reihe

$$51) \quad x^n = \tfrac{n}{n} \cdot P^{-\frac{n}{s}} v1 \cdot y^{\frac{m.n}{s}} + \tfrac{n}{n+d} \cdot P^{-\frac{n+d}{s}} v2 \cdot y^{\frac{m(n+d)}{s}}$$

$$+ \tfrac{n}{n+2d} \cdot P^{-\frac{n+2d}{s}} v3 \cdot y^{\frac{m(n+2d)}{s}} + \ldots + \tfrac{n}{n+pd} \cdot P^{-\frac{n+pd}{s}} v(p+1) \cdot y^{\frac{m(n+pd)}{s}} + \ldots$$

In dem Falle, wenn $n+pd$ verschwindet, wird zur Bildung von $Qv(p+1)$ entweder die zurücklaufende Form 49 gewählt, oder in den Gleichungen 30 und 31 wird zuvor der gemeinschaftliche Faktor $\frac{n+pd}{s}$ weggenommen und dann $n+pd = o$ gesetzt.

§. 26.

Wir wollen weiter gehen und uns eine Aufgabe in grösserem Umfang, als diejenige ist, womit wir diese Untersuchung begonnen haben, vorlegen. In der vorigen Aufgabe stand y^m ganz allein; wir wollen jetzt eine Verbindung von y, und zwar nach den Potenzen von y geordnet, annehmen:

$$\overset{1}{b}y^{hs} + \overset{2}{b}y^{h(s+d)} + \overset{3}{b}y^{h(s+2d)} + \ldots\ldots$$

$$= \overset{1}{a}x^s + \overset{2}{a}x^{s+d} + \overset{3}{a}x^{s+2d} + \ldots\ldots$$

und eine Potenz von x^n durch eine Reihe, nach den Potenzen von y geordnet, darstellen.

Die Auflösung der vorigen Aufgabe hebt alle Schwierigkeiten, welche sich hier häufen würden, wenn diese allgemeinere an die Spitze gestellt

wäre. Wir haben nur nöthig die beiden Reihen durch Q und P zu bezeichnen:

$$Q = \overset{1}{b}y^{hs} + \overset{2}{b}y^{h(s+d)} + \overset{3}{b}y^{h(s+2d)} + \ldots\ldots$$

und

$$P = \overset{1}{a}x^{s} + \overset{2}{a}x^{s+d} + \overset{3}{a}x^{s+2d} + \ldots\ldots$$

nach der vorigen Aufgabe die verlangte Potenz von x nach den Potenzen von Q zu entwickeln,

$$x^n = \tfrac{n}{n}.P^{-\frac{n}{s}}v1.Q^{\frac{n}{s}} + \tfrac{n}{n+d}.P^{-\frac{n+d}{s}}v2.Q^{\frac{n+d}{s}} + \tfrac{n}{n+2d}.P^{-\frac{n+2d}{s}}v3.Q^{\frac{n+d}{s}} + \ldots$$

und nun in diese Reihe die Potenzen von Q, entwickelt nach den Potenzen von y, einzutragen:

$$x^n = \tfrac{n}{n}.P^{-\frac{n}{s}}v1\,(Q^{\frac{n}{s}}v1.y^{nh} + Q^{\frac{n}{s}}v2\;.y^{(n+d)h} + Q^{\frac{n}{s}}v3\;.y^{(n+2d)h} + \ldots$$

$$+ \tfrac{n}{n+d}.P^{-\frac{n+d}{s}}v2\,(\quad Q^{\frac{n+d}{s}}v1 \qquad Q^{\frac{n+d}{s}}v2$$

$$+ \tfrac{n}{n+2d}.P^{-\frac{n+2d}{s}}v3\,(\quad Q^{\frac{n+2d}{s}}v1$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die Reihe, welche wir für x^n erhalten, ist, wenn wir ihre Vorzahlen durch $Rv1, Rv2, \ldots$ bezeichnen, daher folgende:

$$x^n = Rv1.y^{nh} + Rv2.y^{(n+d)h} + Rv3.y^{(n+2d)h} + \ldots\ldots$$

und ihr Bildungsgesetz folgendes:

52) $$Rv1 = \tfrac{n}{n}.P^{-\frac{n}{s}}v1.Q^{+\frac{n}{s}}v1$$

$$Rv2 = \tfrac{n}{n}.P^{-\frac{n}{s}}v1.Q^{+\frac{n}{s}}v2 + \tfrac{n}{n+d}.P^{-\frac{n+d}{s}}v2.Q^{+\frac{n+d}{s}}v1$$

$$\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$Rv(p+1) = \tfrac{n}{n}.P^{-\frac{n}{s}}v1.Q^{+\frac{n}{s}}v(p+1) + \ldots + \tfrac{n}{n+q}.P^{-\frac{n+qd}{s}}v(q+1).Q^{+\frac{n+qd}{s}}v(p-q+1) + \ldots$$

$$\ldots + \tfrac{n}{n+pd}.P^{-\frac{n+pd}{s}}v(p+1).Q^{+\frac{n+pd}{s}}v1$$

ZWEITE ABHANDLUNG.

ZWEITE ABHANDLUNG.

Entwicklung der Exponentialgrössen in Reihen.

§. 27.

Die Stellenzahl einer Potenz bestehe aus mehreren Elementen, nach den Potenzen einer Grundgrösse x geordnet:

$$a^{{}^{1}c x^{1} + {}^{2}c x^{2} + {}^{3}c x^{3} + \ldots} = V$$

wir suchen eine Entwicklung

$$V = Vv1 + Vv2x^{1} + Vv3x^{2} + \ldots\ldots$$

welche die Grösse V in einer Reihe, nach derselben Grundgrösse geordnet, darstellt.

Die Aufgabe fassen wir einfacher, wenn wir die erstere Reihe durch z vorstellen:

$$z = {}^{1}c x^{1} + {}^{2}c x^{2} + {}^{3}c x^{3} + \ldots\ldots$$

und nun nach der Entwicklung von V nach den Potenzen von z fragen:

$$U = a^{z} = Uv1 + Uv2 \,.\, z + Uv3 \,.\, z^{2} + Uv4 \,.\, z^{5} + \ldots\ldots$$

Denn von dieser ist ein leichter Schritt zu jener; jene entspringt aus dieser, wenn die Potenzen von z, gereihet nach x, eingeführt werden.

Die Entwicklung selbst gewinnen wir, wenn wir a^{z} auf das Binomium zurückführen. Dieses können wir dadurch bewerkstelligen, wenn wir $1+a-1$ statt a setzen:

$$a^{z} = (1+a-1)^{z} = k(z,1) + k(z,2).(a-1)^{1} + \ldots + k(z,m+1).(a-1)^{m} + \ldots\ldots$$

Führen wir nun statt $k(z,m+1)$

$$k(z,m+1)=\frac{\overset{0}{C}/z^m-\overset{1}{C}/z^{m-1}+\overset{2}{C}/z^{m-2}-\ldots\pm\overset{m-1}{C}/z^1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,m}$$

$$(1\,,\quad 2\,,\quad 3\,,\quad .\quad .\quad .\quad m-1)$$

ein, so gewinnen wir die Reihe:

$$a^z=1$$

$$+\left\{\frac{(a-1)^1}{1}\overset{0}{C}/-\frac{(a-1)^2}{1\,.\,2}.\overset{1}{C}/+\frac{(a-1)^3}{1\,.\,2\,.\,3}.\overset{2}{C}/-\frac{(a-1)^4}{1.2.3.4}.\overset{3}{C}/+\ldots\right\}z^1$$

$$+\left\{\frac{(a-1)^2}{1\,.\,2}.\overset{0}{C}/-\frac{(a-1)^3}{1\,.\,2\,.\,3}.\overset{1}{C}/+\frac{(a-1)^4}{1.2.3.4}.\overset{2}{C}/-\ldots\right\}z^2$$

$$+\left\{\frac{(a-1)^3}{1\,.\,2\,.\,3}.\overset{0}{C}/-\frac{(a-1)^4}{1.2.3.4}.\overset{1}{C}/+\ldots\right\}z^3$$

$$+\left\{\frac{(a-1)^4}{1.2.3.4}.\overset{0}{C}/-\ldots\right\}z^4$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$(1)\qquad (1,\ 2)\quad (1\,,\,2\,,\,3)$$

Die Vorzahlen von z^1, z^2, z^3, . . . sind selbst Reihen; wir suchen diese nicht allein zu vereinfachen, sondern auch ihren Zusammenhang auf. Wir bemerken in dieser Hinsicht, dafs das allgemeine Glied von der Vorzahl von z^1

$$\frac{(-)^m(a-1)^{m+1}\,.\,\overset{m}{C}/}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(m+1)}$$

$$(1,\ 2,\ .\ .\ .\ .\ m)$$

ist. Da nun

$$\overset{m}{C}/=1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m$$

$$(1,2,\ldots m)$$

ist, so wird das allgemeine Glied dieser Vorzahl nach Vernachlässigung der gemeinschaftlichen Faktoren

$$\frac{(-)^m\,.\,(a-1)^{m+1}}{m\,+\,1}$$

Die Vorzahl von z^1, welche wir A nennen, ist also:

$$A = \frac{(a-1)^1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots :$$

welche Reihe nur dann abbricht, wenn z eine ganze bejahete Zahl ist.

Die Vorzahlen von $z^2, z^3, z^4, \ldots$ sind gleichfalls Reihen, welche auf dieselbe Art entstanden sind; sie bieten zwar durch die Menge der Verbindungen, woraus jedes ihrer Glieder besteht, mehr Hindernisse bei ihrer Vereinfachung dar, können jedoch sämmtlich auf die Vorzahl von z^1, nämlich auf A zurückgebracht werden. Dieses Zurückführen geschieht dadurch, dafs wir aus den Reihen irgend ein Glied, das $(m+1)$te Glied der qten Horizontalreihe vorgestellt durch $W(q, m+1)$ herausheben:

$$W(q,m+1) = \frac{\overset{m}{C'}}{1.2.3.....(m+q)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha$$
$$1, 2, \ldots. (m+q-1)$$

und die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen in zwei Abtheilungen bringen:

$$\overset{m}{C'} = \overset{m}{C'} + (m+q-1)\,\overset{m-1}{C'}$$
$$1,2,\ldots m+q-1 \quad 1,2,\ldots\ldots\ldots m+q-2$$

wovon, wenn diese Abtheilungen mit den zugehörigen Faktoren versehen werden,

$$\frac{\overset{m}{C'}}{1.2\ldots(m+q)} = \frac{\overset{m}{C'}}{1.2\ldots(m+q-1)} \cdot \frac{1}{m+q} + \frac{\overset{m-1}{C'}}{1.2\ldots(m+q-1)} \cdot \frac{m+q-1}{m+q}$$
$$1,2,\ldots m+q \quad 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots m+q-2$$

die erste Abtheilung nach α das $(m+1)$te Glied der vorhergehenden, und die zweite Abtheilung das mte Glied derselben Horizontalreihe ist. Es ist also

$$W(q,m+1) = \frac{1}{m+q} \cdot W(q-1,m+1) + \frac{m+q-1}{m+q} \cdot W(q,m)$$

oder:

$$(m+q)\,W(q,m+1) = W(q-1,m+1) + (m+q-1) \cdot W(q,m) \ldots\ldots \beta$$

Diese Gleichung giebt die zurücklaufende Bildungsweise der Glieder dieser

Horizontalreihen, sie weiset auf ein Glied der vorhergehenden Reihe und auf das vorhergehende Glied derselben Reihe hin. Diese Bildungsweise bringen wir auf eine andere, wenn wir in diese Gleichung statt m setzen

$m-1, m-2, \ldots 2, 1, 0$

$$(m+q) \cdot W(q,m+1) = W(q-1,m+1) + (m+q-1) \cdot W(q,m)$$
$$(m+q-1) \cdot W(q,m) = W(q-1,m) + (m+q-2) \cdot W(q,m-1)$$
$$(m+q-2) \cdot W(q,m-1) = W(q-1,m-1) + (m+q-3) \cdot W(q,m-2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(q+1) \cdot W(q,2) = W(q-1,2) + q \cdot W(q,1)$$
$$q \cdot W(q,1) = W(q-1,1)$$

und diese Gleichungen zusammenzählen, wodurch eine neue Gleichung entsteht,

$$(m+q).W(q,m+1) = W(q-1,m+1)+W(q-1,m)+\ldots+W(q-1,2)+W\ q-1,1) \ldots \gamma$$

in welcher die zurücklaufende Bestimmung sich blofs auf die Glieder der vorhergehenden Horizontalreihe bezieht.

Diese Gleichung setzt uns in den Stand, jede folgende Horizontalreihe aus der erstern

$$A = \frac{(a-1)^1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots\ldots\ldots$$
$$= Av1 \cdot (a-1)^1 - Av2 \cdot (a-1)^2 + Av3 \cdot (a-1)^3 \ldots + \ldots$$

abzuleiten; denn vergleichen wir sie mit der Gleichung, welche die zurücklaufende Bildungsweise der Potenzen dieser Reihe angiebt, nämlich mit

$$\frac{m+q}{q} \cdot A^q v(m+1) = A^{q-1} v(m+1) + A^{q-1} vm + \ldots + A^{q-1} v1 \ldots . (\delta$$

die entsteht, wenn in 36 $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $n = q-1$, $P = A$, $a = \overset{1}{a}$, $\overset{1}{a} = \frac{1}{1}$, $\overset{2}{a} = \frac{1}{2}$, $\overset{3}{a} = \frac{1}{3}$, ... gesetzt wird, so finden wir, dafs für $q = 2$, da $W(1,1) = A\ v1$, $W(1,2) = A^1 v2$, ... und $W(1,m+1) = A^1 v(m+1)$ ist,

$$W(2,m+1) = \tfrac{1}{2} A^2 v(m+1)$$

Setzen wir $q = 3$, so finden wir aus γ und δ, dafs

$$W(3,m+1) = \frac{1}{2.3} \cdot A^3 v(m+1)$$

Dieses Einführen der schon gefundenen Werthe in die Gleichung γ, und das Vergleichen mit δ kehrt immer in derselben Ordnung zurück, und führt zu gleichen Resultaten, sämmtlich enthalten in der Gleichung

$$W(q, m+1) = \frac{1}{1.2.3.....q} \cdot A^q v(m+1)$$

Diese Gleichung würde uns berechtigen, aus ihr zu folgern, dafs auch die qte Horizontalreihe oder die Vorzahl von z^q

$$= \frac{1}{1.2.3 \ldots q} \cdot A^q$$

sey, wenn auch die Vorzahlen von z^2, z^3, . . . z^q, ... alle Glieder von A^2, A^3, . . . A^q, ... enthielten. Dieses findet aber doch nur statt, wenn z eine verneinte oder eine gebrochene Zahl ist, in welchem Fall alle Horizontalreihen unendlich sind, und also auch alle Glieder enthalten, welche eine Potenz von A enthalten mufs. Wenn aber z eine ganze und bejahete Zahl ist, so mangeln schon der zweiten Horizontalreihe mehrere Glieder und noch mehrere den übrigen Horizontalreihen, um vollständige entwickelte Potenzen der ersten Reihe zu seyn. Dieser Umstand hindert uns, ein so einfaches Gesetz, welches wir für gewisse Werthe von z aufgefunden haben, auch auf alle Werthe von z auszudehnen, und gewährt uns wenige Aussicht auf Allgemeinheit für die folgende Untersuchung.

Indem wir uns nach einem Mittel umsehen, dieser Beschränkung zu begegnen, bemerken wir, dafs entweder für jedes z andere allgemeinere Gesetze für den näheren Zusammenhang unter den Horizontalreihen statt finden müssen, oder dafs wir auch berechtigt sind, für einen ganzen und bejaheten Werth von z die erste und auch jede folgende Horizontalreihe unendlich anzunehmen, und dann bei ihnen auch dasselbe Gesetz gelten zu lassen, welches für jedes verneinte und gebrochene z statt findet und die gegenseitigen Beziehungen der Vorzahlen von z so leicht übersehen läfst. Wir legen nns daher die allgemeine Reihe vor:

$$a^z = Uv1 + Uv2 \cdot z^1 + Uv3 \cdot z^2 + \ldots\ldots$$

und fragen: Welches Gesetz findet unter den Vorzahlen von z statt und zwar für jeden möglichen Werth von z?

Die Frage mufs sich aus den Bedingungen lösen lassen, welche sie selbst vorlegt. Die Reihe soll für jeden Werth von z gelten, also auch wenn $z = 0$ ist; es ist also:

$$a^0 = 1 = Uv1$$

Sie mufs auch gelten für jedes Vielfache von z, also auch für $2z$, oder es mufs seyn:

$$a^{2z} = 1 + Uv2 \cdot (2z)^1 + Uv3 \cdot (2z)^2 + Uv4 \cdot (2z)^3 + \ldots\ldots$$

Das Vervielfachen der vorgegebenen Reihe für a^z durch sich selbst mufs dasselbe hervorbringen:

$$a^{2z} = (1 + Uv2.z + Uv3.z^2 + \ldots)^2$$

$$= 1 + Uv2.z + Uv3 \cdot z^2 + Uv4 \cdot z^3 + \ldots\ldots$$

$$Uv2 \quad Uv2 \cdot Uv2 \quad Uv3 \cdot Uv2$$

$$Uv3 \quad Uv2 \cdot Uv3$$

$$Uv4$$

Es müssen also folgende Gleichungen statt finden:

$$2^1 \cdot Uv2 = Uv2 + Uv2$$

$$2^2 \cdot Uv3 = Uv3 + Uv2 \cdot Uv2 + Uv3$$

$$2^3 \cdot Uv4 = Uv4 + Uv3 \cdot Uv2 + Uv2 \cdot Uv3 + Uv4$$

. . . . . .

$$2^{p+1} \cdot Uv\,p+2) = Uv(p+2) + Uv(p+1) \cdot Uv2 + \ldots\ldots + Uv(p+2)$$

Diese Gleichungen bestätigen das oben aufgefundene Gesetz, denn aus den ersten Gleichungen erhalten wir die Werthe von

$$Uv3 = \frac{(Uv2)^2}{1.2}, \quad Uv4 = \frac{(Uv2)^3}{1.2.3}, \ldots\ldots\ldots$$

Das allgemeine Verfahren bei diesen Rechnungen besteht darin, dafs die schon gefundenen Werthe von $Uv3, Uv4, \ldots, Uv(p+2)$ in die folgende Gleichung

$$(2^{p+2} - 2\,Uv(p+3) = Uv(p+2) \cdot Uv2 + \ldots\ldots + Uv2 \cdot Uv(p+2)$$

getragen werden,

$$(2^{p+2}-2)\mathrm{Uv}(p+3) = (\mathrm{Uv}2)^{p+2}\left\{\frac{1}{1.2\ldots(p+1).1}+\frac{1}{1.2\ldots p.1.2}+\ldots.+\frac{1}{1.1.2\ldots(p+1)}\right\}$$

und die Gleichung durch

$$1.2.3....(p+2)$$

vervielfacht wird

$$1.2...(p+2).(2^{p+2}-2).\mathrm{Uv}(p+3) = (\mathrm{Uv}2)^{p+2} \times$$
$$\times\left(\frac{p+2}{1}+\frac{(p+2)(p+1)}{1.2}+....+\frac{(p+2)(p+1)....3.2}{1.2.3....(p+1)}\right.$$

worauf, da die eingeklammerte Reihe die Entwicklung des Binomiums

$$(1+1)^{p+2}$$

ist, in welchem das erste und letzte Glied fehlen, statt dieser

$$2^{p+2}-1-1 = 2^{p+2}-2$$

gesetzt, und nun dieser gemeinsame Faktor vernachlässigt wird, wodurch zuletzt die Gleichung

$$1.2.3....(p+2).\mathrm{Uv}(p+3) = (\mathrm{Uv}2)^{p+2}$$

entsteht. Es ist also ganz allgemein für jedes mögliche z

$$\mathrm{Uv}(p+3) = \frac{(\mathrm{Uv}2)^{p+2}}{1.2.3....(p+2)}$$

Das Glied Uv2 kann nur auf dem Wege gefunden werden, wie Seite 78 gezeigt ist, und ist also das früher gefundene A.

Das Gesetz, welches für die verneinten oder gebrochenen z gilt, gilt also auch für das bejahete ganze z. Dieses ist aber bei bejaheten ganzen z nicht möglich, so lange A eine endliche Reihe ist, diese mufs also, so wie bei verneinten Werthen von z, auch unendlich angenommen werden. Es ist folglich ganz allgemein für jeden Werth von z

53) $$a^z = 1+\frac{A^1z^1}{1}+\frac{A^2z^2}{1.2}+\frac{A^3z^3}{1.2.3}+.....$$

und

54) $$A = \frac{(a-1)^1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+....$$

§. 28.

Der allgemeineren Aufgabe, welche wir uns im Anfange dieser Untersuchung Seite 77 vorlegten, können wir nun leicht durch Einführung der verschiedenen Potenzen von z, sämmtlich begriffen in

$$z^p = (cx^1 + cx^2 + cx^3 + \ldots)^p$$
$$= z^p v1 \cdot x^p + z^p v2 \cdot x^{p+1} + z^p v3 \cdot x^{p+2} + \ldots$$

Genüge leisten; die Reihe, welche hierdurch entsteht, ist:

55) $$a^{{}^1cx^1+{}^2cx^2+{}^3cx^3+\ldots} = a^z =$$

$$= 1 + \frac{A^1}{1} \cdot z^1 v1 \cdot x^1 + \frac{A^1}{1} \cdot z^1 v2 \cdot x^2 + \frac{A^1}{1} \cdot z^1 v3 \cdot x^3 + \ldots\ldots$$
$$\frac{A^2}{1.2} \cdot z^2 v1 \qquad \frac{A^2}{1.2} \cdot z^2 v2$$
$$\frac{A^3}{1.2.3} \cdot z^3 v1$$
$$= a^z v1 + a^z v2 \cdot x^1 + a^z v3 \cdot x^2 + a^z v4 \cdot x^3 + \ldots$$

deren unabhängige Bildungsweise folgende Gleichung angiebt:

56) $$a^z v(m+1) = \frac{A^1}{1} \cdot z^1 vm + \frac{A^2}{1.2} \cdot z^2 v(m-1) + \frac{A^3}{1.2.3} \cdot z^3 v(m-2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A^m}{1.2\ldots m} \cdot z^m v1.$$

Es ist z. B.

$$a^z v1 = 1$$

$$a^z v2 = \frac{A^1}{1} \cdot {}^1c$$

$$a^z v3 = \frac{A^1}{1} \cdot {}^2c + \frac{A^2}{1.2} \cdot {}^{11}cc$$

$$a^z v4 = \frac{A^1}{1} \cdot {}^3c + \frac{A^2}{1.2} \cdot \begin{vmatrix} 12 \\ 21 \\ cc \end{vmatrix} + \frac{A^3}{1.2.3} \cdot {}^{111}ccc$$

$$a^z v 5 = \frac{A^1}{1}.c^4 + \frac{A^2}{1.2}\cdot\Big|_{22}^{13}{}_{31}^{}{}_{cc} + \frac{A^3}{1.2.3}\cdot\Big|_{121}^{112}{}_{211}^{}{}_{ccc} + \frac{A^4}{1.2.3.4}\cdot c^{1\,1\,1\,1}_{c\,c\,c\,c}$$

§. 29.

Ausser der unabhängigen fordert die Wissenschaft auch noch die zurücklaufende Bildungsweise. Wir legen uns daher die Frage vor: womit müssen die früheren Glieder $a^z v 1$, $a^z v 2$, ... vervielfacht werden, dafs daraus ein späteres Glied hervorgehe?

Wir nennen diese uns noch unbekannten Faktoren $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\varphi 3$, .. und nennen das, was durch diese Produkte erzeugt wird, S:

$$a^z v 1 \,.\, \varphi 1 + a^z v 2 \,.\, \varphi 2 + ... + a^z v(m+1) \,.\, \varphi(m+1) = S$$

Werden diese Glieder nach 56 in ihre Bestandtheile zerlegt

$$a^z v 1 = 1$$

$$a^z v 2 = z^1 v 1 \,.\, \frac{A^f}{1}$$

$$a^z v 3 = z^1 v 2 \,.\, \frac{A^1}{1} + z^2 v 1 \,.\, \frac{A^2}{1.2}$$

. . . . . .

$$a^z v(m+1) = z^1 v m \,.\, \frac{A^1}{1} + \ldots + z^m v 1 \,.\, \frac{A^m}{1.2\ldots m}$$

diese mit den zugehörigen Faktoren versehen, und die sämmtlichen Gleichungen zusammengezählt, so entstehen zur Rechten des Gleichheitszeichens mehrere Scheitelreihen, sämmtlich begriffen in

$$\frac{A^p}{1.2\ldots p}.[z^p v 1 . \varphi(p+1) + z^r v 2 \,.\, \varphi(p+2) + \ldots + z^r v(m-p+1) \,.\, \varphi(m+1)]$$

Diese eingeklammerte Reihe kann nach 37 summirt werden, wenn

$$\varphi(p+1) = (\alpha+\beta p) \,.\, z^q v(m-p+1)$$

gesetzt wird. In diesem Falle ist die Summe der pten Scheitelreihe

$$\frac{\alpha q+p(\alpha+\beta q+\beta m)}{p+q} \cdot z^{p+q} v(m-p+1) \cdot \frac{A^p}{1.2 \ldots . p}$$

und also, wenn

$$\alpha + \beta q + \beta m = B$$

gesetzt wird

$$57) \quad \alpha . z^q v(m+1) . a^z v1 + (\alpha+\beta) . z^q vm . a^z v2 + \ldots + (\alpha+m\beta) . z^q v1 . a^z v(m+1) =$$

$$= \frac{\alpha q}{q} . z^q v(m+1) + \frac{\alpha q+1B}{q+1} z^{q+1} vm . \frac{A^1}{1} + \frac{\alpha q+2B}{q+2} . z^{q+2} v(m-1) . \frac{A^2}{1.2} + \ldots .$$

$$\ldots + \frac{\alpha q+mB}{q+m} . z^{q+m} v1 . \frac{A^m}{1.2 \ldots m}$$

Diese Gleichung giebt überhaupt an, was durch Verbindung der Vorzahlen von a^z mit den Gliedern des Polynomiums z^q in Vereinigung mit einer um β zunehmenden Grösse hervorgebracht wird. Soll nun dieses eine Vorzahl in der Entwicklung von a^z seyn, so mufs nach 56

$$q = 1 \text{ und } B = 0, \text{ also } \alpha = -\beta(m+1)$$

seyn, wodurch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens

$$-\beta(m+1) . \frac{a^z v(m+2)}{A}$$

entsteht, und folgende Gleichung erzeugt wird

$$58) \quad \frac{(m+1) . a^z v(m+2)}{A} = (m+1) . \overset{m+1}{c} . a^z v1 + m . \overset{m}{c} . a^z v2 + \ldots$$

$$\ldots + 1 . \overset{1}{c} . a^z v(m+1)$$

welche zeigt, wie irgend ein späteres Glied aus den früheren gebildet werden kann.

Die Gleichung 57 ist sehr allgemein, die Gleichung 58 ist nur ein besonderer Fall von ihr; setzen wir $\beta = 0$, so geht sie in folgende über:

$$59) \quad z^q v(m+1) . a^z v1 + z^q vm . a^z v2 + \ldots + z^q v1 . a^z v(m+1) =$$

$$= z^q v(m+1) + z^{q+1} vm . \frac{A^1}{1} + z^{q+2} v(m-1) . \frac{A^2}{1.2} + \ldots + z^{q+m} v1 . \frac{A^m}{1.2 \ldots m}$$

welche sich dadurch von der Gleichung 58 unterscheidet, dafs die Produkte nicht von den Faktoren 1, 2, 3, . . . begleitet sind.

§. 30.

Nachdem beide Bildungsweisen, die unabhängige und die zurücklaufende, gefunden sind, ist die Aufgabe, welche wir uns im Anfange der Untersuchung vorgelegt haben, gelöst, und den Anforderungen Genüge geleistet, welche wir an jede Untersuchung machen. Wir legen uns jetzt die umgekehrte Aufgabe vor. Wir haben aus der Reihe

$$a^{\overset{1}{c}}x^1 + \overset{2}{c}x^2 + \overset{3}{c}x^3 + \ldots\ldots$$

die Reihe

$$a^z v1 + a^z v2 \,.\, x^1 + a^z v3 \,.\, x^2 + \ldots\ldots$$

entwickelt, und fragen jetzt, wie wird aus den letzten die erste wiedergefunden?

Die Auflösung dieser Aufgabe mufs zwei Bildungsweisen für die erste Reihe geben, die zurücklaufende und die unabhängige. Die zurücklaufende liegt schon in der Gleichung 58. Um aber zu der unabhängigen Bildungsweise zu gelangen, beginnen wir wieder die Untersuchung mit einem einfachen Falle, und bahnen uns dadurch den Weg zu einer grössern Allgemeinheit. Wir lassen nämlich die Reihe

$$a^z v1 + a^z v2 \,.\, x^1 + a^z v3 \,.\, x^2 + \ldots\ldots$$

nur aus zwei Gliedern $1 + x$ bestehen, so dafs

$$a^z v1 = a^z v2 = 1$$

und alle übrigen Glieder $a^z v3$, $a^z v4$, ... verschwinden, und fragen nun: Wie müssen $\overset{1}{c}$, $\overset{2}{c}$, ... beschaffen seyn, damit

$$a^{\overset{1}{c}}x^1 + \overset{2}{c}x^2 + \overset{3}{c}x^3 + \ldots\ldots = 1 + x$$

Die beiden Bildungsweisen von $a^z v(m+1)$ in 56 und 58 geben uns hier Aufschlufs; die unabhängige in 56 giebt, nachdem $m = 1$ gesetzt ist, vermittelst

$$a^z v2 = \frac{A^1}{1} \,.\, z^1 v1 = \frac{A^1}{1} \,.\, \overset{1}{c} = 1$$

den Werth von

$$\overset{1}{c} = \tfrac{1}{A}$$

Die zurücklaufende in 58 zeigt vermittelst der Gleichung

$$0 = (m+1) \cdot \overset{m+1}{c} + m \cdot \overset{m}{c}$$

oder

$$\overset{m+1}{c} = -\tfrac{m}{m+1} \cdot \overset{m}{c}$$

wie jedes folgende Glied aus dem unmittelbar vorhergehenden abgeleitet wird. Wir erhalten hierdurch folgende Werthe:

$$\overset{2}{c} = -\tfrac{1}{2} \cdot \overset{1}{c} = -\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{A}$$

$$\overset{3}{c} = -\tfrac{2}{3} \cdot \overset{2}{c} = +\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{A}$$

$$\overset{4}{c} = -\tfrac{3}{4} \cdot \overset{3}{c} = -\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{A}$$

. . . . . .

Der Uebergang vom Vorhergehenden

$$\overset{m}{c} = (-)^{m-1} \cdot \tfrac{1}{m} \cdot \tfrac{1}{A}$$

zum Folgenden ist

$$\overset{m+1}{c} = -\frac{m}{m+1} \cdot (-)^{m-1} \cdot \tfrac{1}{m} \cdot \tfrac{1}{A} = (-)^{m} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \tfrac{1}{A}$$

Es ist folglich

$$60) \quad a^{A^{-1}} \cdot (\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \dots) = 1 + x$$

oder die Reihe

$$\tfrac{1}{A} \cdot (\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \dots)$$

zeigt an, das wievielste Glied $1 + x$ in der Potenzenreihe ist, welche a zur Grundzahl hat, welches, wie bekannt ist, auch durch folgende Zeichen bemerkbar gemacht werden kann:

$$61) \quad \log. : (1 + x) = \tfrac{1}{A}(\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \dots)$$

Von diesem einfachen Falle zu der allgemeinen Reihe

$$1 + a^{z}v2 \cdot x^1 + a^{z}v3 \cdot x^2 + \dots$$

ist jetzt der Uebergang leicht; wir führen in 61 statt x die Reihe

$$a^z v2 \cdot x^1 + a^z v3 \cdot x^2 + \ldots$$

ein, und ordnen die Produkte nach den Potenzen von x; oder setzen wir statt x die Reihe

$$B = \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \overset{3}{b}x^3 + \ldots$$

so erhalten wir hierdurch, wenn wir die bequemere Bezeichnung mit log. beibehalten, die Entwicklung

62) $$\log.(1 + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \overset{3}{b}x^3 + \ldots) = \lg.(1+B) =$$
$$= A^{-1}\left(\tfrac{1}{1}B^1 v1 \cdot x^1 + \tfrac{1}{2}B^1 v2 \cdot x^2 + \tfrac{1}{1}B^1 v3 \cdot x^3 + \ldots\right.$$
$$\left. -\tfrac{1}{2}B^2 v1 \ldots -\tfrac{1}{2}B^2 v2 \right.$$
$$\left. +\tfrac{1}{3}B^3 v1 \right.$$
$$= \overset{1}{c}x^1 + \overset{2}{c}x^2 + \overset{3}{c}x^3 + \ldots$$

Die unabhängige Bildungsweise giebt daher folgende Gleichung an:

63) $$\overset{m}{c} = A^{-1} \cdot \left\{ \frac{B^1 vm}{1} - \frac{B^2 v(m-1)}{2} + \frac{B^3 v(m-2)}{3} - \ldots \ldots \right.$$
$$\left. \ldots\ldots (-)^{m-1} \cdot \frac{B^m v1}{m} \right\}$$

§. 31.

Diese unabhängige Bildungsweise gründet sich auf die Glieder verschiedener Potenzen der Reihe

$$\overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \overset{3}{b}x^3 + \ldots\ldots$$

welche nicht die vollständige Reihe

$$V = 1 + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 + \ldots\ldots$$

ist, deren Logarithme gesucht wird. Wir können diesen Gegenstand nicht verlassen, bevor wir nicht den Logarithmen der Reihe auch durch die Glieder der Potenzen derselben Reihe dargestellt haben, und müssen daher in 63 die Glieder der Potenzen der verkürzten Reihe in Glieder der Potenzen der vollständigen Reihe übertragen. Indem wir dieses vermit-

telst der Gleichung vornehmen, welche schon Seite 51 zu diesem Zwecke gebildet ist, und hier nur die Veränderung erleidet, dafs U, P, a gegen B, V, 1 ausgetauscht werden, geht die obige Gleichung 63 in folgende über

$$A_0 {}^{m}c_1 = \tfrac{1}{2}[k(1,1).V^1v(m+1)$$
$$- \tfrac{1}{2}[k(2,1).V^2v(m+1) - k(2,2).V^1v(m+1)$$
$$+ \tfrac{1}{3}[k(3,1).V^3v(m+1) - k(3,2).V^2v(m+1) + k(3,3).V^1v(m+1)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(-)^{m-1}}{m}.[k(m,1).V^m v(m+1) - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-)^{m-1}.k(m,m).V^1v(m+1)$$

Wir sondern die Glieder des Binomiums von jenen des Polynomiums; der Faktor, welcher mit

$$(-)^{h-1}V^h v(m+1)$$

verbunden ist, ist

$$\frac{k(h,1)}{h} + \frac{k(h+1,2)}{h+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{k(m,m-h+1)}{m}$$

oder

$$\tfrac{1}{h}[1 + k(h,2) + k(h+1,3) + k(h+2,4) + \ldots\ldots + k(m-1,m-h+1)]$$

Die besondern Eigenschaften dieser Produkte machen, dafs wir sie vereinigen können, es ist

$$1 + k(h,2) = 1 + \tfrac{h}{1} = \tfrac{h+1}{1} = k(h+1,2)$$
$$1 + k(h,2) + k(h+1,3) = k(h+1,2) + k(h+1,3)$$
$$= \tfrac{h+1}{1}(1+\tfrac{h}{2}) = k(h+2,3)$$

Ueberhaupt kommt zu den Produkten

$$1 + k(h,2) + \ldots + k(h+q-1,q+1) = k(h+q,q+1)$$

noch das Produkt $k(h+q,q+2)$, so sind die beiden Produkte

$$k(h+q,q+1) + k(h+q,q+2)$$

nur durch einen Faktor $\frac{h}{q+1}$ unterschieden, welcher bewirkt, dafs die Summe beider

$$k(h+q,q+1).(1+\tfrac{h}{q+1}) = k(h+q+1,q+2)$$

einen Faktor mehr enthält. Die Summe der Reihe, welche als Faktor dem

Gliede des Polynomiums zugesellt wird, ist also

$$\frac{k(m,m-h+1)}{h} \text{ oder } = \frac{k(m,h+1)}{h}$$

und also das allgemeine Glied von $A\overset{m}{c}$

$$= \frac{(-)^{h-1} \cdot k(m,h+1) \cdot V^h v(m+1)}{h}$$

Führen wir nun hierin 1, 2, 3, ... m statt h ein, so entsteht die Gleichung

64) $A \cdot \overset{m}{c} = \frac{1}{1} \cdot k(m,2) \cdot V^1 v(m+1) - \frac{1}{2} \cdot k(m,3) \cdot V^2 v(m+1)$
$+ \frac{1}{3} \cdot k(m,4) \cdot V^3 v(m+1) - \ldots . (-)^{m-1} \cdot \frac{1}{m} \cdot k(m,m+1) \cdot V^m v(m+1)$

welche die unabhängige Bildungsweise der Glieder

$$\overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \overset{3}{c} \ldots . \overset{m}{c}$$

aus den Gliedern verschiedener Potenzen der vollständigen Reihe V angiebt.

§. 32.

Vergleichen wir diese unabhängigen Bildungsweisen 63 und 64 von $\overset{m}{c}$ mit jenen des Polynomiums in 30 und 31 selbst, so finden wir die merkwürdige Wahrheit: dafs

$\overset{m}{c}$ aus $V^n v(m+1)$

entsteht, wenn $V^n v(m+1)$ durch $n \cdot A$ gemessen, und dann $n = o$ gesetzt wird. Zeigen wir dieses Geschäft durch

$$\frac{V^n v(m+1)}{A \cdot n = o}$$

an, so können wir diesen Uebergang vom Polynomium zum Logarithmen der Reihe durch folgende Gleichung bemerkbar machen:

65) $\log : V = lg(1 + Vv2 \cdot x^1 + Vv3 \cdot x^2 + Vv4 \cdot x^3 + \ldots .) =$

$$= \frac{1}{\Lambda}\left\{\frac{V^n v\,2}{n=0} \cdot x^1 + \frac{V^n v\,3}{n=0} \cdot x^2 + \frac{V^n v\,4}{n=0} \cdot x^3 + \ldots\right\}$$

Diese Herleitung gilt jedoch nur, so lange

$$V^n v\ m+1)$$

durch n mefsbar ist, welches nicht statt findet, wenn $m = o$ ist.

§. 33.

Hiermit wäre nun die Aufgabe, welche wir uns im Anfange dieser Untersuchung vorlegten, in ihrem ganzen Umfange gelöfst. Es bleibt uns nur noch übrig, die Vortheile zu benutzen, welche sich uns für die Berechnung der Logarithmen durch die entwickelten Reihen darbieten. Zuvörderst bemerken wir, dafs in der Entwicklung

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

für jede Grundzahl a eine Grösse A vorkommt, welche nur von der Grundzahl a und nicht von x abhängt, und Modul genannt wird. Diese beiden Grössen, die Grundzahl a und der Modul A bestimmen sich gegenseitig, ohne dafs eine dritte Grösse auf sie Einflufs hat.

Nehmen wir zuerst den Modul $A = 1$ an, und nennen die Grundzahl, welche zu diesem Modul gehört, e, so ist

66) $$e^x = 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Setzen wir nun $x = 1$, so finden wir diese Grundzahl für den Modul 1, nämlich:

67) $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = 2{,}7182818\ldots$$

Hier sind wir dem Einfachen nachgegangen, und sind zu einem einzelnen Falle gelangt; unser Zweck war eigentlich, den Zusammenhang der Grössen a und A näher zu bestimmen. Wie aus der Grundzahl a der Modul A gefunden wird, lehrt schon 54, und wie aus dem Modul A die Grundzahl

a gefunden wird, zeigt 53; denn da diese Gleichung für jedes Glied in der Potenzenreihe gilt, so setzen wir, wenn wir nur die Grundzahl haben wollen, z = 1 und erhalten die Gleichung

$$68) \quad a = 1 + \frac{A^1}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

welche deutlicher das Gesetz veroffenbart, nach welchem die Grundzahl a aus dem Modul A gebildet wird.

Wenn wir in der vorigen Potenzenreihe, in welcher e die Grundzahl und 1 der Modul ist, das Ate Glied suchen, so finden wir solches durch die Reihe

$$e^A = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

welche dieselbe ist, durch welche die Grundzahl a aus dem Modul A gefunden wird. Dieses Zusammentreffen zweier Grössen gewährt uns eine Gleichung

$$69) \quad a = e^A \quad \text{oder} \quad A = lg : a$$

welche zeigt, wie, nachdem die Potenzenreihe mit der Grundzahl e und dem Modul 1 berechnet ist, der Modul einer andern Potenzenreihe gefunden wird, deren Grundzahl a ist; es giebt nämlich die Stelle, welche a in jener Potenzenreihe einnimmt, zugleich den Modul der zweiten Potenzenreihe an. Die Logarithmen für die Grundzahl e werden blos mit lg ohne o, hingegen für eine andere Grundzahl mit log mit dem o bezeichnet.

Wir sind jedoch hierbei nicht an die Potenzenreihe, in e^x begriffen, gebunden, und können den Modul A finden, ohne jene Potenzenreihe berechnet zu haben; die Potenzenreihe, welche hierbei zu Hülfe genommen wird, kann eine andere seyn, z. B. h^x, denn da e^A und a gleich sind, so nehmen sie eine und dieselbe Stelle in jeder Potenzenreihe ein, oder in Zeichen

$$e^A = h^y = a$$

oder

$$\log : e^A = y = \log : a$$

also

$$70) \qquad A \,.\, \log : e = \log : a \quad \text{oder} \quad A = \frac{\log : a}{\log : e}$$

Um also den Modul einer Potenzenreihe zu finden, dessen Grundzahl a ist, müssen für beide Grundzahlen a und e die Stellenzahlen in irgend einer berechneten Potenzenreihe aufgesucht und die erste durch die zweite gemessen werden.

§. 34.

Die verschiedenen Zeichen von x, die verschiedenen Formen von x selbst, und die mannigfaltigen Verbindungen, welche mit diesen Grössen getroffen werden können, gewähren viele Vortheile bei der Berechnung der Logarithmen; die vorzüglichsten sind folgende:

Das verneinte Zeichen, welches in der Reihe

$$\log (1 + x) = A^{-1} \,.\, \left\{ \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \right\}$$

dem x vorgesetzt wird, bewirkt, dafs alle Glieder dieser Reihe dasselbe Zeichen erhalten

$$71) \qquad \log (1 - x) = - A^{-1} \,.\, \left\{ \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \right\}$$

Werden diese beiden Reihen durch Abzählen verbunden, und

$$\log (1 + x) - \log (1 - x) = \log \left\{ \frac{1 + x}{1 - x} \right\}$$

gesetzt, so wird

$$72) \qquad \log \left\{ \frac{1 + x}{1 - x} \right\} = 2 \,.\, A^{-1} \,.\, \left\{ \frac{x^1}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \right\}$$

Wird in die Reihe für $\log (1 + x)$ statt x gesetzt $\frac{u}{x}$, und berücksichtiget, dafs

$$\log \left(1 + \frac{u}{x}\right) = \log (x + u) - \log x$$

ist, so geht sie in folgende über

73) $\log(x+u) = \log x + A^{-1} \cdot \left[\frac{1}{1}\left(\frac{u}{x}\right)^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{x}\right)^3 - \ldots\right)$

Wird $\frac{n}{2x+u}$ statt x in 72 eingeführt, so wird

74) $\log(x+u) = \log x + 2 \cdot A^{-1} \cdot \left[\frac{1}{1}\left(\frac{n}{2x+u}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{2x+u}\right)^3 + \ldots.\right]$

§. 35.

Ein besonderes Erleichterungsmittel bei der Berechnung der Logarithmen besteht in der Umwandlung der Reihen für

$$\log(1 \pm x) \text{ und } \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

in andere Reihen, in welchen die ersten Glieder das, was gesucht wird, schon so genau geben, dafs die übrigen Glieder vernachlässigt werden können. Solche Reihen von erwähnter Eigenschaft können entweder dadurch hervorgebracht werden, dafs der Grösse x verschiedene Formen gegeben werden, oder dafs die Glieder der Reihe auf eine solche Weise gruppirt werden, dafs dadurch die ersteren Glieder mehr, und die späteren Glieder weniger Einflufs auf das Resultat erhalten. Ersteres ist schon oben geschehen, letzteres können wir durch Vervielfachung der gegebenen Reihen bewerkstelligen. Vervielfachen wir z. B. durch

$$\frac{1+x}{1+x}$$

so erhalten wir die Reihe

75) $\log(1+x) = \frac{A^{-1}}{1+x} \cdot \left\{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{4.5} + \ldots.\right\}$

durch $\frac{1-x^2}{1-x^2}$

76) $\log(1+x) = \frac{A^{-1}}{1-x^2} \cdot \left\{\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - 2\left(\frac{x^3}{1.3} - \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^5}{3.5} - \ldots\right)\right\}$

und

77) $\log\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\} = \frac{2.A^{-1}}{1-x^2} \cdot \left(\frac{x}{1} - 2\left\{\frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{3.5} + \frac{x^7}{5.7} + \frac{x^9}{7.9} + \ldots.\right\}\right)$

durch $\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2}$

78) $$\log(1+x = \frac{A^{-1}}{(1+x)^2}\left\{\frac{x}{1}+\frac{3x^2}{2}+2\left(\frac{x^3}{1.2.3}-\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{3.4.5}-\ldots\right)\right\}$$

und durch $\frac{1-x^4}{1-x^4}$

79) $$\log\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\} = \frac{2A^{-1}}{1-x^4}\left\{\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}-4\left(\frac{x^5}{1.5}+\frac{x^7}{3.7}+\frac{x^9}{5.9}+\ldots\right)\right\}$$

Andere Faktoren erzeugen andere Reihen.

DRITTE ABHANDLUNG.

Entwicklung von $(\{1+x^2\}^{\frac{1}{2}}+1) = P^n$ in Reihen.

§. 36.

Wir legen uns hier ein zweifaches Binomium vor, welches eben dadurch, dafs die Ordnung der durch Zeichen angekündigten Geschäfte willkürlich ist, einer verschiedenen Behandlung unterworfen werden kann. Wir können nämlich

α) zuerst das Binomium $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe, und dann die hierdurch entstandene Reihe zur nten Potenz erheben, oder wir können

β) zuerst das Binomium $(z^{\frac{1}{2}}+1)^n$, wo $z = 1+x^2$ ist, nach Potenzen von z entwickeln, und dann in diese Reihe die entwickelten Potenzen von z eintragen.

Beide Verfahrungsweisen wollen wir hier vorlegen und zwar zuerst α:

§. 37.

Indem wir zur Entwicklung des Binomiums $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ schreiten, bemerken wir, dafs die Reihe entweder nach den steigenden oder nach den abnehmenden Potenzen von x geordnet werden kann. Wir reihen dieses Binomium zuerst nach den steigenden Potenzen von x, und erhalten zur ferneren Bearbeitung das Polynomium

$$P^n = [2 + k(\tfrac{1}{2},2) \cdot x^2 + k(\tfrac{1}{2},3) \cdot x^4 + k(\tfrac{1}{2},4) \cdot x^6 + \ldots]^n$$
$$= P^n v1 + P^n v2 \cdot x^2 + P^n v3 \cdot x^4 + \ldots$$

Die zurücklaufende Bildungsweise giebt nach 36 die Gleichung

$$2 \cdot \alpha \cdot P^n v(m+1) + (\alpha+\beta) \cdot k(\tfrac{1}{2},2) \cdot P^n vm + (\alpha+2\beta) \cdot k(\tfrac{1}{2},3) \cdot P^n v(m-1)$$
$$+ \ldots + (\alpha+m\beta) \cdot k(\tfrac{1}{2},m+1) \cdot P^n v1 = (\alpha+\frac{m\beta}{n+1}) \cdot P^{n+1} v(m+1)$$

an; sie kann auf folgende Art sehr vereinfacht werden. Indem zuerst $\alpha = -1$ und $\beta = 2$ gesetzt wird, geht diese Gleichung in folgende über

$$-2 \cdot P^n v(m+1) + 1 \cdot k(\tfrac{1}{2},2) \cdot P^n vm + 3 \cdot k(\tfrac{1}{2},3) \cdot P^n v(m-1) + \ldots .$$
$$\ldots . + (2m-1) \cdot k(\tfrac{1}{2},m+1) \cdot P^n v1 = \frac{2m-n-1}{n+1} \cdot P^{n+1} v(m+1)$$

Wird aber $\alpha = 0$, $\beta = 2$ und $m = m+1$ gesetzt, so entsteht eine zweite Gleichung

$$P^n v(m+1) - 1 \cdot k(\tfrac{1}{2},2) \cdot P^n vm - 3 \cdot k(\tfrac{1}{2},3) \cdot P^n v(m-1) - \ldots .$$
$$\ldots . - (2m-1) \cdot k(\tfrac{1}{2},m+1) \cdot P^n v1 = \frac{2m+2}{n+1} \cdot P^{n+1} v(m+2)$$

welche mit jener vereint eine dritte erzeugt

$$-P^n v(m+1) = \frac{2m-n-1}{n+1} \cdot P^{n+1} v(m+1) + \frac{2m+2}{n+1} \cdot P^{n+1} v(m+2)$$

oder, wenn $m-1$ und $n-1$ statt m und n gesetzt werden,

$$80) \qquad P^n v(m+1) = -\frac{n}{2m} \cdot P^{o-1} vm + \frac{n+2-2m}{2m} \cdot P^n vm$$

Diese Gleichung, obgleich sie eine Bildungsweise angiebt, welche in doppelter Hinsicht zurücklaufend genannt werden kann, führt doch schnell zu der unabhängigen Bildungsweise, denn da

$$P^n v1 = 2^n$$

ist, so ist

$$P^n v2 = -\tfrac{n}{2} \cdot P^{n-1} v1 + \tfrac{n}{2} \cdot P^n v1 = -\tfrac{n}{2} \cdot 2^{n-1} + \tfrac{n}{2} \cdot 2^n = \tfrac{n}{1} \cdot 2^{n-2}$$

$$P^n v3 = -\tfrac{n}{4} \cdot P^{n-1} v2 + \frac{n-2}{4} \cdot P^n v2 = -\tfrac{n}{4} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot 2^{n-3} + \frac{n-2}{4} \cdot \tfrac{n}{1} 2^{n-2}$$
$$= \tfrac{n}{2} \cdot \frac{n-3}{1} \cdot 2^{n-4}$$

$$P^n v4 = -\tfrac{n}{6} \cdot P^{n-1} v3 + \frac{n-4}{6} \cdot P^n v3$$
$$= -\tfrac{n}{6} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-4}{1} \cdot 2^{n-5} + \frac{n-4}{6} \cdot \tfrac{n}{2} \frac{n-3}{1} \cdot 2^{n-4} = \tfrac{n}{3} \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2} \cdot 2^{n-6}$$

Der Uebergang vom vorhergehenden Gliede

$$P^n v m = \frac{n}{m-1} \cdot k(n-m, m-1) \cdot 2^{n-2m+2}$$

zu dem folgenden Gliede ist

$$P^n v(m+1) = -\frac{n}{2m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdot k(n-m-1, m-1) \cdot 2^{n-2m+1} +$$

$$+ \frac{n+2-2m}{2m} \cdot \frac{n}{m-1} \cdot k(n-m, m-1) \cdot 2^{n-2m+2}$$

$$= \frac{n}{m(m-1)} \cdot k(n-m-1, m-1) \cdot [-(n-1)+2(n-m)] \cdot 2^{n-2m}$$

$$= \frac{n}{m} \cdot k(n-m-1, m) \cdot 2^{n-2m}$$

Es ist folglich

$$81) \quad [(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+1]^n = 2^n + \tfrac{n}{1} \cdot k(n-2,1) \cdot 2^{n-2} x^2 + \tfrac{n}{2} \cdot k(n-3,2) \cdot 2^{n-4} \cdot x^4$$
$$+ \tfrac{n}{3} \cdot k(n-4,3) \cdot 2^{n-6} \cdot x^6 + \tfrac{n}{4} \cdot k(n-5,4) \cdot 2^{n-8} \cdot x^8 + \ldots .$$

§. 38.

Wir entwickeln das Binomium $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ nach den fallenden Potenzen von x.

$$(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = x^1 + k(\tfrac{1}{2},2) \cdot x^{-1} + k(\tfrac{1}{2},3) \cdot x^{-3} + k(\tfrac{1}{2},4) \cdot x^{-5} + \ldots .$$

und damit dem zweiten Elemente 1 ein Platz in dieser Reihe angewiesen werden kann, setzen wir x^0 statt 1. Da aber hierdurch die Folge der Glieder gestört ist, so müssen wir auch die übrigen geraden Potenzen von x in die Reihe aufnehmen und dann das Polynomium

$$[x^1 + x^0 + k(\tfrac{1}{2},2) \cdot x^{-1} + 0x^{-2} + k(\tfrac{1}{2},3) \cdot x^{-3} + 0x^{-4} + \ldots .]^n =$$
$$= P^n v1 \cdot x^n + P^n v2 \cdot x^{n-1} + P^n v3 \cdot x^{n-2} + P^n v4 \cdot x^{n-3} + \ldots .$$

bilden. Die zurücklaufende Bildungsweise dieses Polynomiums giebt im Allgemeinen nach 36 folgende Gleichung an

$$\alpha P^n v(m+1) + (\alpha+\beta)P^n vm + (\alpha+2\beta) \cdot k(\tfrac{1}{2},2) \cdot P^n v(m-1)$$
$$+ (\alpha+4\beta) \cdot k(\tfrac{1}{2},3) \cdot P^n v(m-3) + (\alpha+6\beta) \cdot k(\tfrac{1}{2},4) \cdot P^n v(m-5) + \ldots$$
$$\ldots = (\alpha + \frac{\beta m}{n+1}) \cdot P^{n+1} v(m+1)$$

Die Eigenthümlichkeiten der Elemente

$$a^0, a^1, a^2, \ldots$$

gestatten in diesem Falle wieder durch verschiedene Bestimmungen von α und β zwei Gleichungen hervorzubringen, welche vereint zu einer dritten einfacheren führen. Wir setzen deshalb zuerst $\alpha = 0$ und $\beta = 1$, und erhalten die Gleichung

$$P^n vm + P^n v(m-1) - 1 \cdot k(\tfrac{1}{2},2) \cdot P^n v(m-3) - 3 \cdot k(\tfrac{1}{2},3) \cdot P^n v(m-5)$$
$$- 5 \cdot k(\tfrac{1}{2},4) \cdot P^n v(m-7) - \ldots = \frac{m}{n+1} \cdot P^{n+1} v(m+1)$$

und dann $\alpha = 1$, $\beta = -1$ und $m = m-2$, die Gleichung

$$P^n v(m-1) - 1 \cdot k(\tfrac{1}{2},2) P^n v(m-3) - 3 \cdot k(\tfrac{1}{2},3) P^n v(m-5)$$
$$- 5k(\tfrac{1}{2},4) P^n v(m-7) - \ldots = \frac{n-m+3}{n+1} \cdot P^{n+1} v(m-1)$$

Beide Gleichungen erzeugen durch Abzählen eine dritte Gleichung

$$P^n vm = \frac{m}{n+1} \cdot P^{n+1} v(m+1) - \frac{n-m+3}{n+1} \cdot P^{n+1} v(m-1)$$

oder, wenn $n-1$ statt n gesetzt wird, die Gleichung

$$82) \quad P^n v(m+1) = \frac{n}{m} \cdot P^{n-1} vm + \frac{n-m+2}{m} \cdot P^n v(m-1)$$

welche an Einfachheit die ursprüngliche Gleichung übertrifft, und so beschaffen ist, dafs aus ihr die unabhängige Bildungsweise mit Leichtigkeit hergeleitet werden kann. Wir fangen bei dieser Herleitung mit dem ersten Gliede an

$$P^n v1 = 1$$

und gehen zu dem zweiten Gliede über

$$P^n v2 = \tfrac{n}{1} \cdot P^{n-1} v1 = \tfrac{n}{1}$$

denn $P^n v0 = 0$. Die übrigen Glieder sind

$$P^n v3 = \tfrac{n}{2} \cdot P^{n-1} v2 + \tfrac{n}{2} \cdot P^n v1 = \tfrac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{1} + \tfrac{n}{2} = \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{1}$$

$$P^n v4 = \tfrac{n}{3} \cdot P^{n-1} v3 + \frac{n-1}{3} \cdot P^n v2 = \tfrac{n}{3} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-1}{1} + \frac{n-1}{3} \cdot \tfrac{n}{1} =$$

$$= \tfrac{n}{3} \cdot \frac{(n+1)(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$P^n v5 = \tfrac{n}{4} \cdot P^{n-1} v4 + \frac{n-2}{4} \cdot P^n v3 = \tfrac{n}{4} \cdot \frac{(n+2)n\,n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Der Uebergang von dem vorhergehenden Gliede

$$P^n v\,m = \frac{n}{m-1} \cdot \frac{(n+m-3)(n+m-5) \ldots\ldots (n-m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-2)}$$

zu dem folgenden ist allgemein

$$P^n v(m+1) = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdot \frac{(n+m-4)(n+m-6) \ldots (n-m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-2)}$$

$$+ \frac{n-m+2}{m} \cdot \frac{n}{m-2} \cdot \frac{(n+m-4)(n+m-6) \ldots (n-m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-3)}$$

$$= \frac{n}{m} \cdot \frac{(n+m-2)(n+m-4) \ldots\ldots (n-m+4)(n-m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-1)}$$

Alle Glieder sind also auf gleiche Art aus Faktoren zusammengesetzt, deren gemeinschaftlicher Unterschied 2 ist. Es ist also für jedes n

$$83) \quad [(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 1]^n = x^n + \tfrac{n}{1} \cdot x^{n-1} + \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{1} \cdot x^{n-2} + \tfrac{n}{3} \cdot \frac{(n+1)(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-3}$$

$$+ \tfrac{n}{4} \cdot \frac{(n+2)n(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^{n-4} + \tfrac{n}{5} \cdot \frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^{n-5} + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{n}{m} \cdot \frac{(n+m-2)(n+m-4) \ldots (n-m+2)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (m-1)} \cdot x^{n-m} + \ldots\ldots$$

§. 39.

Das zweite Verfahren, welches wir im Anfange mit β bezeichnet haben, ist das Umgekehrte des vorigen α, und führt zu demselben Ziele. Wir setzen $1 + x^2 = z$, entwicklen das Binomium

$$(z^{\frac{1}{2}} + 1)^n = z^{\frac{n}{2}} + k(n,2) \cdot z^{\frac{n-1}{2}} + k(n,3) \cdot z^{\frac{n-2}{2}} + \ldots\ldots$$

und führen hierin, statt der verschiedenen Potenzen von z die entwickelten Reihen, sämmtlich begriffen in

$$z^{\frac{n-q}{2}} = 1 + k(\frac{n-q}{2},2).x^2+k(\frac{n-q}{2},3).x^4+k(\frac{n-q}{2},4) \cdot x^6 + \ldots$$

ein. Wir erhalten hierdurch

$$P^n = 1 + k(n,2) + k(n,3) + k(n,4) + \ldots\ldots$$

$$+[k(n,1).k(\tfrac{n}{2},2)+k(n,2).k(\frac{n-1}{2},2)+k(n,3).k(\frac{n-2}{2},2) + \ldots\ldots]x^2$$

$$+[k(n,1).k(\tfrac{n}{2},3)+k(n,2).k(\frac{n-1}{2},3)+k(n,3).k(\frac{n-2}{2},3) + \ldots\ldots]x^4$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Hier kommt alles darauf an, einfachere Formen für die Vorzahlen von den Potenzen von x aufzusuchen; wir setzen deshalb das allgemeine Glied

$$k(n,1).k(\tfrac{n}{2},m)+k(n,2).k(\frac{n-1}{2},m)+k(n,3).k(\frac{n-2}{2},m) + \ldots = s(n,m)$$

Zerlegen wir jedes Produkt, woraus $s(n,m)$ besteht, in zwei andere Produkte

$$k(n,p).k(\frac{n-p+1}{2},m) =$$

$$k(n,p)k(\frac{n-p+1}{2},m-1).\frac{n-2m+4}{2m-2}-k(n-1,p-1).k(\frac{n-1-(p-2)}{2},m-1).\frac{n}{2m-2}$$

so finden wir, dafs

$$s(n,m) = \frac{n-2m+4}{2m-2}.s(n,m-1) - \frac{n}{2m-2}.s(n-1,m-1)$$

dieselbe Gleichung, welche wir auf einem andern Wege so gefunden haben.

Entwicklung des Polynomiums

$$(2 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots)^n = (e^x + 1)^n = D^n$$

oder

$$D^n = D^n v1 + D^n v2 \,.\, x^1 + D^n v3 \,.\, x^2 + D^n v4 \,.\, x^3 + \ldots\ldots$$

§. 40.

Die unabhängige Bildung, welche die Gleichungen 30 und 31 im Allgemeinen angeben, ist in diesem besondern Falle, da a = 2 ist, für jedes n

84) $$D^n v(m+1) = k(n,1) \,.\, E^0 v(m+1) \,.\, 2^n + k(n,2) \,.\, E^1 vm \,.\, 2^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots\ldots + k(n,m+1) \,.\, E^m v1 \,.\, 2^{n-m}$$

wo

$$E = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = e^x - 1$$

ist, und

85) $$D^n v(m+1) = k(n,m+1).k(n-m-1,1).D^m v(m+1).2^{n-m}$$
$$- k(n,m) \,.\, k(n-m,2) \,.\, D^{m-1} v(m+1) \,.\, 2^{n-m+1}$$
$$+ k(n,m-1) \,.\, k\,n-m+1,3) \,.\, D^{m-2} v(m+1) \,.\, 2^{n-m+2} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (-)^m \,.\, k(n,1) \,.\, k(n-1,m+1) \,.\, D^0 v(m+1) \,.\, 2^n$$

Machen wir von der Gleichung 36 Anwendung, welche die zurücklaufende Bildungsweise jedes Polynomiums angiebt, und noch zwei Grössen α und β enthält, die nach Willkühr angenommen werden können, so können wir dadurch, dafs wir zuerst

$$\alpha = 0 \text{ und } \beta = 1$$

und dann

$\alpha = 1$, $\beta = 0$ und $m = m - 1$

annehmen, zwei Gleichungen hervorbringen,

$$D^n vm + \frac{D^n v(m-1)}{1} + \ldots + \frac{D^n v1}{1.2 \ldots m-1} = \frac{m \,.\, D^{n+1} v(m+1)}{n+1}$$

und

$$2 \,.\, D^n vm + \frac{D^n v(m-1)}{1} + \ldots + \frac{D^n v1}{1.2 \ldots m-1} = D^{n+1} vm$$

und durch Abzählen dieser beiden Gleichungen eine dritte Gleichung

$$86) \qquad D^{n+1} v(m+1) = \frac{n+1}{m} \,.\, (D^{n+1} vm - D^n vm)$$

welche eine Bildungsweise unsers Polynomiums enthält, die in doppelter Hinsicht zurücklaufend genannt werden kann; denn nach ihr wird jedes Glied der $(n+1)$ten Potenz aus dem unmittelbar vorhergehenden Gliede derselben Potenz und aus einem Gliede der vorhergehenden Potenz gebildet.

Diese Gleichung findet für jedes n statt, läfst aber im Falle, wenn $n = -1$ ist, die Glieder unbestimmt.

Verbinden wir diese Gleichung mit der Gleichung 84, so erhalten wir, nachdem $n = n - 1$ gesetzt ist, eine von den vorigen verschiedene unabhängige Bildungsweise

$$87) \quad m.D^n v(m+1) = n.k(n,1).E^0 vm.2^{n-1} + (n+1).k(n,2).E^1 v(m-1).2^{n-2} + (n+2).k(n,3).E^2 v(m-2).2^{n-3} + \ldots + (n+m-1).k(n,m).E^{m-1} v1 \,.\, 2^{n-m}$$

welche sich dadurch von der Gleichung 84 unterscheidet, dafs sie ein Glied weniger hat, dagegen aber in jedem Produkte noch einen Faktor mehr.

Auf gleiche Weise können wir die folgenden Glieder fortbringen, so, dafs zuletzt nur Produkte von n und m und von bekannten Grössen übrig bleiben, wenn nicht die Weitläufigkeiten abschreckten, auf diesem Wege weiter zu gehen. Aus demselben Grunde erwähnen wir hier nur, dafs dieselben Verbindungen mit 85 und 86 gemacht werden können, ohne sie selbst vorzunehmen.

Für die zurücklaufende Bildungsweise der Glieder einer Potenzenreihe aus den früheren Gliedern derselben Potenz ist die Gleichung 38 gefunden,

welche für unser Polynomium, wenn $f = 1$ und $g = n$ gesetzt wird, folgende Gestalt annimmt.

88) $$2m.D^n v(m+1) + \frac{(m-n-1).D^n vm}{1} + \frac{(m-2n-2).D^n v(m-1)}{1.2}$$
$$+ \frac{(m-3n-3).D^n v(m-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{(m-m.n-m).D^n v1}{1.2.\ldots.m} = 0$$

Diese Gleichung gilt für jedes n, und hilft besonders da aus, wo die vorige Gleichung 86 ihre Dienste versagt, nämlich in dem Falle, wenn $n = -1$ ist.

§. 41.

Ausser den verschiedenen Arten, die Glieder der Potenzenreihe im Allgemeinen zu bilden, giebt es in besondern Fällen noch andere, diesen ganz eigenthümliche Bildungsweisen. Wir finden letztere immer, wenn wir das Besondere des gegebenen Falles herausheben und auf dieses Schlufsfolgen gründen. Im gegenwärtigen Falle besteht die gegebene Reihe aus 1 und aus einer Reihe, welche wir früher schon unter e^x kennen gelernt haben. Benutzen wir diesen Umstand, und setzen e^x statt der Reihe, entwickeln das Binomium

$$(1 + e^x)^n = 1 + k(n,2) \cdot e^x + k(n,3) \cdot e^{2x} + k(n,4) \cdot e^{3x} + \ldots\ldots$$

und führen hierin die entwickelten Potenzen von e^x, sämmtlich begriffen in

$$e^{px} = 1 + \frac{px}{1} + \frac{p^2x^2}{1.2} + \frac{p^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

ein, so erhalten wir für die nte Potenz unserer Reihe folgende Entwicklung

89) $$D^n = k(n,1) + k(n,2) + k(n,3) + \ldots$$
$$+ \tfrac{x}{1}[k(n,2) \cdot 1^1 + k(n,3) \cdot 2^1 + k(n,4) \cdot 3^1 + \ldots$$
$$+ \frac{x^2}{1.2}[k(n,2).1^2 + k(n,3) \cdot 2^2 + k(n,4) \cdot 3^2 + \ldots$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die Gleichung, welche diese unabhängige Bildungsweise allgemein angiebt, ist folgende

$$90) \qquad D^n v(m+1) = \frac{k(n,2).1^m + k(n,3).2^m + k(n,4).3^m + k(n,5).4^m + \ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\, m}$$

Ist n eine ganze bejahete Zahl, so sind auch die Glieder dieses Polynomiums endliche Gebilde; ist aber n eine verneinte oder gebrochene Zahl, so sind selbst die einzelnen Glieder unendliche Reihen.

§. 42.

Wir nehmen jetzt den besondern Fall vor, wenn $n = -1$ ist, auf welchen uns schon eben der Umstand, dafs eine zurücklaufende Bildungsweise für ihn nicht gilt, aufmerksam gemacht hat. Wir finden für ihn aus 84

$$91) \qquad D^{-1}v(m+1) = E\,v(m+1).2^{-1} - E^2 vm.2^{-2} + E^3 v(m-1).2^{-3} - \ldots$$
$$\ldots\ldots (-)^m . E^{m+1} v1 . 2^{-m-1}$$

aus 85

$$92) \qquad D^{-1}v(m+1) = k(m+1,m+1).D^0 v(m+1).2^{-1} - k(m+1,m).D^1 v(m+1).2^{-2}$$
$$+ k(m+1,m-1).D^2 v(m+1).2^{-3} - \ldots (-)^m . k(m+1,1).D^m v(m+1).2^{-m-1}$$

aus 87

$$93) \qquad m.D^{-1}v(m+1) = 1.E\,v(m-2).2^{-4} - 2.E^3 v(m-3).2^{-5} + 3.E^4 v(m-4).2^{-6}$$
$$\ldots\ldots (-)^{m-1} . (m-2) . E^{m-1} v1 . 2^{-m-1}$$

aus 88

$$94) \qquad 2 . D^{-1}v(m+1) + \frac{D^{-1}vm}{1} + \frac{D^{-1}v(m-1)}{1 \,.\, 2} + \ldots + \frac{D^{-1}v1}{1.2\ldots m} = 0$$

und aus 90

$$95) \qquad D^{-1}v(m+1) = \frac{-1^m + 2^m - 3^m + 4^m - \ldots + \ldots\ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, m}$$

Entwicklung des Polynomiums

$$\left\{\frac{1}{1}+\frac{x^1}{1\,.\,2}+\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^3}{1.2.3.4}+\ldots\right\}^n=\left\{\frac{e^x-1}{x}\right\}^n=E^n$$

oder

$$E^n = E^n v_1 + E^n v_2\,.\,x^1 + E^n v_3\,.\,x^2 + E^n v_4\,.\,x^3 + \ldots.$$

§. 43.

Die erste zurücklaufende Bildungsweise liegt in der Gleichung

$$96)\quad E^{n+1}v_{(m+1)}=\frac{E\,v_{(m+1)}}{1}+\frac{E^n v_m}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{E^1 v_1}{1.2\ldots(m+1)}$$

die entsteht, wenn in der Gleichung 36 $\beta = o$ gesetzt und ihr die obige Grundreihe untergelegt wird.

Diese Gleichung gilt für jedes n; in dem Falle, wenn n eine ganze bejahete Zahl ist, läfst sich aus ihr eine sehr einfache zurücklaufende Bildungsweise herleiten. Ist nämlich $n = 1$, so ist

$$E^2 v_{(m+1)}=\frac{1}{1.1.2\ldots(m+1)}+\frac{1}{1.2.1.2\ldots m}+\frac{1}{1.2.3.1.2\ldots(m-1)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1.2\ldots(m+1).1}$$

und wenn durch $1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,(m+2)$ vervielfacht wird

$$1\,.\,2\ldots(m+2)\,.\,E\,v_{(m+1)} = k(m+2,2)+k(m+2,3)+\ldots$$
$$\ldots+k(m+2,m+2)$$

Zu den Gliedern zur Rechten des Gleichheitszeichens fehlt zur vollständigen Entwicklung des Binomiums

$$(1+1)^{m+2}=2^{m+2}$$

das erste $k(m+2,1) \cdot 1^{m+2}$ und letzte Glied $k(m+2,m+3) \cdot 1^{m+2}$.
Es ist also

$$E^2 v(m+1) = \frac{2^{m+2} - k(2,2) \cdot 1^{m+2}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (m+2)}$$

Die Glieder der dritten Potenz ergeben sich nach obiger Gleichung 96, weun $n = 2$ gesetzt, und vorstehender Werth eingeführt wird; nach diesem ist

$$E^3 v(m+1) = \frac{2^{m+2}}{1.1.2\ldots(m+2)} + \frac{2^{m+1}}{1.2.1.2\ldots(m+1)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{2^2}{1.2\ldots(m+1).1.2}$$

$$- k(2,2) \cdot \left\{ \frac{1^{m+2}}{1.1.2\ldots(m+2)} + \frac{1^{m+1}}{1.2\,1.2\ldots(m+1)} + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1^2}{1.2\ldots(m+1).1.2} \right\}$$

oder, wenn durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m+3)$ vervielfacht wird,

$$1.2\ldots(m+3).E^3 v(m+1) = k(m+3,2).2^{m+2} + k(m+3,3).2^{m+1} + \ldots + k(m+3,m+2).2^2$$
$$- k(2,2) \cdot [k(m+3,2) \cdot 1^{m+2} + \ldots + k(m+3,m+2) \cdot 1^2]$$

Der erste Theil nach dem Gleichheitszeichen ist die Entwicklung von

$$(2+1)^{m+3}$$ und der zweite von $(1+1)^{m+3}$

aber sowohl zu jener als zu dieser fehlen das erste und die beiden letzten Glieder, so dafs

$$1.2\ldots.(m+3).E^3 v(m+1) = 3^{m+3} - k(m+3,1).2^{m+3} - k(m+3,m+4).2^0.1^{m+3}$$
$$- k(m+3,m+3).2^1.1^{m+2} - k(2,2).[2^{m+3} - k(m+3,1).1^{m+3} - k(m+3,m+4).1^0.1^{m+3}$$
$$- k(m+3,m+3).1.1^{m+2}] = 3^{m+3} - k(3,2).2^{m+3} + k(3,3).1^{m+3}$$

Ueberhaupt finden wir, dafs für jedes ganze bejahete n

97) $$E^n v(m+1) =$$

$$= \frac{n^{n+m} - k(n,2).(n-1)^{n+m} + k(n,3).(n-2)^{n+m} - \ldots (-)^{n-1}.k(n,n).1^{n+m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+m)}$$

Um hierbei den Uebergang der vorhergehenden Potenz zu der folgenden deutlich vorzulegen, führen wir in die Gleichung 96 die schon gefundenen $m+1$ Glieder der nten Potenz ein; wir erhalten hierdurch Reihen, deren allgemeines Glied

$$\frac{(-)^p \cdot k(n,p+1) \cdot (n-p)^{n+m-q}}{1.2....(n+m-q).1.2...(q+1)}$$

oder

$$\frac{(-)^p \cdot k(n,p+1) \cdot k(m+n+1,q+2) \cdot (n-p)^{n+m-q}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n+m+1)}$$

ist, oder Reihen, welche entstehen, wenn in vorstehender Formel dem p und q alle Werthe und zwar

$$p = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$$

und

$$q = 0, 1, 2, \ldots m$$

gegeben werden; der Buchstabe Σ mag dieses Einführen der Werthe von p und q anzeigen; es ist also

$$1.2....(n+m+1).E^{n+1}v(m+1) = \Sigma(-)^p.k(n,p+1).k(n+m+1,q+2).(n-p)^{n+m-q}$$

Wir lassen zuerst p unverändert, und geben dem q die oben angezeigten Werthe; die Reihe, welche hierdurch aus

$$k(n+m+1,q+2) \cdot (n-p)^{n+m-q}$$

entspringt, ist die Entwicklung des Binomiums

$$(n-p+1)^{n+m+1}$$

worin aber das erste und die n letzten Glieder fehlen,

$$(n-p+1)^{n+m+1} - (n-p)^{n+m+1} - k(n+m+1,1) \cdot (n-p)^0 - \ldots$$
$$\ldots - k(n+m+1,n) \cdot (n-p)^{n-1}$$

Es ist also

$$1 \cdot 2 \ldots (n+m+1) \cdot E^{n+1} v(m+1) = M - N$$

wo

$$M = \Sigma(-)^p k(n,p+1) \cdot [(n-p+1)^{n+m+1} - (n-p)^{n+m+1}]$$

und

$$N = \Sigma(-)^p k(n+m+1,h+1) \cdot k(n,p+1) \cdot (n-p)^h$$
$$h = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

Setzen wir in M, $p = 0, 1, 2, \ldots n-1$, so erhalten wir eine Reihe, deren allgemeines Glied, wenn wir das letzte $k(n,n).1^{n+m+1}$ ausnehmen,

$$(-)^p.[k(n,p+1)+k(n,p)].(n-p+1)^{n+m+1} = (-)^p.k(n+1,p+1).(n-p+1)^{n+m+1}$$

ist, und es ist

$$M=(-)^n.k(n,n)+\Sigma(-)^p.k(n+1,p+1).(n-p+1)^{n+m+1}.$$

Der Werth von N hängt von der Reihe ab, welche entsteht, wenn in

$$(-)^p.k(n,p+1).(n-p)^h$$

$p = 0, 1, 2, \ldots n-1$ gesetzt wird, wird sie vorgestellt durch $\varphi(n,h)$, so ist

$$N=k(n+m+1,1).\varphi(n,0)+k(n+m+1,2).\varphi(n,1)+\ldots+k(n+m+1,n).\varphi(n,n-1)$$

Die Reihen, welche durch φ vorgestellt werden, lassen sich sämmtlich auf die erste $\varphi(n,0)$ zurückführen; denn

$$(-)^p k(n,p+1).(n-p)^h = (-)^p.n.k(n,p+1).(n-p)^{h-1} + \\ +(-)^{p-1}.n.k(n-1,p).(n-1-p+1)^{h-1}$$

also

$$\varphi(n,h)=n.\varphi(n,h-1)+n.\varphi(n-1,h-1)$$

Da nun

$$\varphi(n,0)=k(n,1)-k(n,2)+\ldots.(-)^{n-1}k(n,n) \\ =(1-1)^n-(-)^n k(n,n+1)=(-)^{n+1}$$

so ist

$$\varphi(n,1)=n.\varphi(n,0)+n.\varphi(n-1,0)=0+0=0$$

. . . . . .

$$\varphi(n,n-1)=n.\varphi(n,n-1)+n\varphi(n-1,n-1)=n.0+n.0=0$$

Mithin

$$N=k(n+m+1,1).\varphi(n,0)=(-)^{n+1}$$

Vereinigen wir nun M und N, und bemerken, dafs

$$(-)^n k(n,n)-(-)^{n+1}=(-)^n.k(n+1,n+1)$$

so erhalten wir die Gleichung

$$1.2\ldots(n+m+1).E^{n+1}v(m+1)=\Sigma(-)^p.k(n+1,p+1).(n-p+1)^{n+m+1}$$

oder

$$E^{n+1}v(m+1)=\frac{(n+1)^{n+m+1}-k(n+1,2).n^{n+m+1}+\ldots(-)^n.k(n+1,n+1).1^{n+m+1}}{1.2.3....(n+m+1)}$$

Leichter würden wir zu der Gleichung 97 oder zu der vorstehenden Gleichung gekommen seyn, wenn wir das Binomium

$$(e^x - 1)^n = e^{nx} - k(n,2) \cdot e^{(n-1)x} + k(n,3) \cdot e^{(n-2)x} - \ldots$$

entwickelt, und nun hierin die entwickelten Potenzen von e nach 66 eingetragen hätten, wodurch die Reihe

$$\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots\ldots$$

entstanden wäre. Bei einem ganzen bejaheten n wären wir berechtigt gewesen, alle Vorzahlen, die dem $\overset{n}{a}$ vorhergehen, unbeachtet zu lassen; denn x^n ist die niedrigste Potenz in der Entwicklung von

$$(e^x - 1)^n$$

Bei einem verneinten oder gebrochenen n hätten wir dieses nicht wagen dürfen; und da diese ganze Entwicklung nicht für letzteres n gilt, so hätten wir auch das Warum beantworten müssen, welchem wir hier ausweichen wollten.

§. 44.

Die allgemeinere Gleichung für die zurücklaufende Bildungsweise ist nach 36 für unser Polynomium

$$98) \quad \frac{\alpha \cdot E^n v(m+1)}{1} + \frac{(\alpha+\beta) \cdot E^n vm}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{(\alpha+m\beta) \cdot E^n v1}{1.2.\ldots.(m+1)} =$$

$$= (\alpha + \frac{m\beta}{n+1}) \cdot E^{n+1} v(m+1)$$

Die beiden Grössen α und β sind in dieser Gleichung ganz willkührlich und nur deshalb eingeführt, um in vorkommenden Fällen einen zweckmässigen Gebrauch von ihnen zu machen, der von den Elementen a, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, ... abhängt, mit welchen sie verbunden sind. Letztere schreiten in gegenwärtigem Falle durch eine gleiche Zunahme des letzten Faktors im Nenner eben so fort, als der Faktor $\alpha + p\beta$, welcher die willkührlichen Grössen α und β enthält. Dieser Umstand gestattet, durch Annahme von $\alpha = \beta = 1$ einen Faktor zu zernichten, wodurch eine einfachere Gleichung

$$E^n v(m+1) + \frac{E^n vm}{1} + \frac{E^n v(m-1)}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{E^n v1}{1.2 \ldots m} = \frac{n+m+1}{n+1} . E^{n+1} v(m+1)$$

entsteht. Eine ähnliche, wenn gleich nicht dieselbe Gleichung, worin nur das erste Glied $E^n v(m+1)$ fehlt, entsteht, wenn in der Gleichung 98 m um 1 erniedrigt oder $m - 1$ statt m und $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ gesetzt wird

$$\frac{E^n vm}{1} + \frac{E^n v(m-1)}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{E^n v1}{1.2 \ldots m} = E^{n+1} vm$$

Verbinden wir diese beiden Gleichungen durch Abzählen, so erhalten wir eine dritte Gleichung

99) $$E^{n+1} v(m+1) = \frac{n+1}{n+m+1} \cdot [E^n v(m+1) + E^{n+1} vm]$$

welche zeigt, wie das $(m+1)$ te Glied der $(n+1)$ten Potenz aus dem mten Gliede derselben Potenz und aus dem $(m+1)$ten Gliede der nten Potenz zusammengesetzt werden kann.

§. 45.

Diese Gleichung ist wieder geeignet, aus ihr für den Fall, wenn n eine ganze hejahete Zahl ist, eine unabhängige Bildungsweise abzuleiten, die von der früher gefundenen 97 ganz verschieden ist. Wir gehen hierbei von der Grundreihe aus, wo $n = 1$ und

$$E^2 v(m+1) = \frac{2}{m+2} . [E v(m+1) + E^2 vm] = \frac{2 . E vm}{m+2} + \frac{1}{3.4 \ldots (m+2)}$$

ist, und nehmen nun nach dieser Vorschrift die Bildung der Glieder vor $E^2 v1 = 1$

$$E^2 v2 = \frac{2 . E^2 v1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2+1}{3}$$

$$E^2 v3 = \frac{2}{4} . \frac{2+1}{3} + \frac{1}{3 . 4} = \frac{2 . 2 + 2 . 1 + 1 . 1}{3 . 4}$$

$$E^2 v4 = \frac{2}{5} . \frac{2.2+2.1+1.1}{3 . 4} + \frac{1}{3.4.5} = \frac{2.2.2+2.2.1+2.1.1+1.1.1}{3 . 4 . 5}$$

Wir haben hier die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den beiden Elementen 1, 2 gefunden, und werden solche bei jedem folgenden Gliede wiederfinden; denn ist

$$E^2vm = \frac{{}^{m-1}_{(1,2)}C}{3.4\ldots(m+1)}$$

so ist das folgende Glied

$$E^2v(m+1) = \frac{2.{}^{m-1}_{(1,2)}C + 1}{3.4\ldots(m+2)}$$

Gesellen wir zu der 1 noch $(m-1)$mal 1, so bilden diese 1^m mit $2.{}^{m-1}_{(1,2)}C$ alle geordnete Verbindungen aus den Elementen 1 und 2 zu m Elementen, oder es ist

$$E^2v(m+1) = \frac{{}^{m}_{(1,2)}C}{3.4.5\ldots(m+2)}$$

Der Weg von den Gliedern der zweiten Potenz zu den Gliedern der dritten giebt folgende Gleichung an

$$E^3v(m+1) = \frac{3}{m+3}.[E^2v(m+1)+E^3vm] = \frac{3.E^3vm}{m+3} + \frac{{}^{m}_{(1,2)}C}{4.5\ldots.(m+3)}$$

Sie führt zu folgenden Werthen

$E^3v1 = 1$

$$E^3v2 = \frac{3.E^3v1}{4} + \frac{2+1}{4} = \frac{3+2+1}{4} = \frac{{}^{1}_{(1,2,3)}C}{4}$$

$$E^3v3 = \frac{3.E^3v2}{5} + \frac{{}^{2}_{(1,2)}C}{4.5} = \frac{3.{}^{1}_{(1,2,3)}C + {}^{2}_{(1,2)}C}{4.5} = \frac{{}^{2}_{(1,2,3)}C}{4.5}$$

$$E^3v4 = \frac{3.E^3v3}{6} + \frac{{}^{3}_{(1,2)}C}{4.5.6} = \frac{3.{}^{2}_{(1,2,3)}C + {}^{3}_{(1,2)}C}{4.5.6} = \frac{{}^{3}_{(1,2,3)}C}{4.5.6}$$

Hier sind die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, entstanden, und dafs sie auch in den folgenden Gliedern wieder vorkommen, ist leicht aus obiger Gleichung zu ersehen; denn ist

$$E^3 v\, m = \frac{{}'C^{m-1}}{4.5.6\ldots(m+2)}_{(1,2,3)}$$

so ist

$$E^3 v(m+1) = \frac{3 \cdot {}'C^{m-1} + {}'C^{m}}{4.5.6\ldots(m+3)}_{(1,2,3)} = \frac{{}'C^{m}}{4.5.6\ldots(m+3)}_{(1,2)\quad(1,2,3)}$$

Dieses Aufsuchen der Glieder der folgenden aus den Gliedern der frühern Potenzen behält den einmal festgesetzten Gang: die gleichartigen Gebilde, nach oben festgesetzter Vorschrift verbunden, erzeugen wieder Gebilde derselben Art. Findet für die Glieder der nten Potenz die Gleichung

$$E^n v(m+1) = \frac{{}'C^{m}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}_{(1,2,3,\ldots n)}$$

statt, so zeigt die Gleichung

$$E^{n+1} v(m+1) = \frac{(n+1) \cdot E^{n+1} v\, m}{n+m+1} + \frac{{}'C^{m}}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m+1)}_{(1,2,\ldots n)}$$

den Uebergang zu den Gliedern der $(n+1)$ten Potenz. Es ergeben sich gleich die ersten Glieder

$$E^{n+1} v1 = 1$$

$$E^{n+1} v2 = \frac{n+1+{}'C^{1}}{n+2}_{1,2,\ldots n} = \frac{{}'C^{1}}{n+2}_{(1,2,\ldots n+1)}$$

$$E^{n+1} v3 = \frac{(n+1).E^{n+1} v2}{n+3} + \frac{{}'C^{2}}{(n+2)(n+3)}_{1,2,\ldots n} = \frac{(n+1).{}'C^{1}}{(n+2)(n+3)}_{(1,2,\ldots n+1)\ (1,2,\ldots n)} + \frac{{}'C^{2}}{(n+2)(n+3)}_{(1,2,\ldots n+1)}$$

und ist einmal das mte Glied

$$E^{n+1}vm = \frac{{}'C^{m-1}}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}_{(1,\,2,\,\ldots\,n+1)}$$

gefunden, so ergiebt sich das $(m+1)$te Glied durch die obige Gleichung

$$E^{n+1}v_{(m+1)} = \frac{(n+1)\,{}'C^{m-1} + {}'C^{m}}{(n+2)\ldots(n+m+1)}_{(1,2,\ldots n+1)\ (1,2,\ldots n)} = \frac{{}'C^{m}}{(n+2)\ldots(n+m+1)}_{(1,\,2,\,\ldots\,n+1)}$$

Es ist also ganz allgemein für jedes ganze bejahete n

100) $$E^{n}v(m+1) = \frac{{}'C^{m}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}_{(1,\,2,\,3,\,\ldots\,n)}$$

§. 46.

Zu diesen dreien allgemeinen Gleichungen 96, 98 und 99 für die zurücklaufende Bildung kommt noch eine vierte, welche zeigt, wie die spätern Glieder aus den früheren Gliedern derselben Potenz hergeleitet werden; sie ist nach 38

101) $$\frac{[m-0(n+1)].E^{n}v(m+1)}{1} + \frac{[m-1(n+1)].E^{n}vm}{1\,.\,2} +$$

$$+ \frac{[m-2(n+1)].E^{n}v(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots + \frac{[m-m(n+1)].E^{n}v1}{1\,.\,2\ldots(m+1)} = 0$$

§. 47.

Wir gehen zu der letzten allgemeinen Bildungsweise über, und machen Anwendung von der Gleichung 31, welche, da $a = 1$ ist, hier eine grössere Einfachheit gewinnt.

102) $$E^{n}v(m+1) = (-)^{m-1}.[k(n,2).k(n-2,m).E^{1}v(m+1)$$

$$-k(n,3).k(n-3,m-1).E^{2}v(m+1)+\ldots(-)^{m-1}.k(n,m+1).k(n-m-1,1).E^{m}v(m+1)]$$

In dieser Gestalt giebt diese Gleichung die zurücklaufende Bildung an, sie führt aber zu zwei neuen ganz allgemeinen Bildungsweisen, wenn statt der Glieder die verschiedenen bejaheten Potenzen, worauf sie zurückweiset, entweder nach 97 die Potenzen der Elemente 1, 2, 3, ... oder nach 100 die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... eingeführt werden, nämlich

103) $$E^n v(m+1) = (-)^{m-1}\left\{\frac{k(n,2).k(n-2,m).1^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}\right.$$
$$+\frac{k(n,3).k(n-3,m-1).[k(2,2).1^{m+2}-k(2,3).2^{m+2}]}{1.2.\ldots.(m+2)}$$
$$+\frac{k(n,4).k(n-4,m-2).[k(3,2).1^{m+3}-k(3,3).2^{m+3}+k(3,4).3^{m+3}]}{1.2.\ldots.(m+3)}$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$\left.+\frac{k.(n,m+1).k(n-m-1,1).[k(m,2).1^{m+m}-k(m,3).2^{m+m}+\ldots(-)^{m-1}k(m,m+1).m^{m+m}]}{1.2.3.\ldots.(m+m)}\right\}$$

und

104) $$E^n v(m+1) = (-)^{m-1}\left\{\frac{k(n,2)\ .\ k(n-2,m)\ .\ {}^{m}_{(1)}C}{2.3.\ldots.(m+1}\right.$$
$$-\frac{k(n,3).k(n-3,m-1).{}^{m}_{(1,2)}C}{3.4.\ldots.(m+2)}+\frac{k(n,4).k(n-4,m-2).{}^{m}_{(1,2,3)}C}{4.5.\ldots.(m+3)}$$
$$\left.-\ldots.+\ldots.(-)^{m-1}\ .\ \frac{k(n,m+1)\ .\ k(n-m-1,1)\ .\ {}^{m}_{(1,2,\ldots m)}C}{(m+1)(m+2)\ .\ \cdot\ .\ .\ (m+m)}\right\}$$

§. 48.

Eine der merkwürdigsten Entwicklungen ist der besondere Fall von der allgemeinen Entwicklung des Polynomiums

$$\left\{\frac{e^x-1}{x}-\right\}^n$$

wenn $n = -1$ ist. Wir heben ihn hier wegen seiner Wichtigkeit besonders heraus, unterwerfen ihn zuerst den allgemeinen Gesetzen und suchen zuletzt für ihn noch besondere Gesetze auf ihm ganz eigenthümlichen Wegen.

Von den allgemeinen Gleichungen in den §en 43 . . . 47 sind für diesen besondern Fall nur die Gleichungen 96, 101, 102, 103 und 104 anwendbar. 96 oder 101 geht über in

$$105) \qquad 0 = \frac{E^{-1}v(m+1)}{1} + \frac{E^{-1}vm}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots + \frac{E^{-1}v1}{1.2\ldots(m+1)}$$

102 in

$$106) \qquad E^{-1}v(m+1) = k(m+1,2) \cdot E^{0}v(m+1) - k(m+1,3) \cdot E^{1}v(m+1) + k(m+1,4) \cdot E^{2}v(m+1) - \ldots\ldots (-)^{m} \cdot k(m+1,m+2) \cdot E^{m}v(m+1)$$

103 in

$$107) \quad E^{-1}v(m+1 = -\frac{k(m+1,3).1^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} - \frac{k(m+1,4).[k(2,2).1^{m+2} - k'2,3).2^{m+2}]}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (m+2)} - \frac{k(m+1,5) \cdot [k(3,2) \cdot 1^{m+3} - k(3,3) \cdot 2^{m+3} + k(3,4) \cdot 3^{m+3}]}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (m+3)} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{k'(m+1,m+2) \cdot [k(m,2) \cdot 1^{2m} - k(m,3).2^{2m} + \ldots\ldots (-)^{m-1}k(m,m+1).m^{2m}]}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (m+m)}$$

104 in

$$108) \qquad E^{-1}v(m+1) = -\frac{k(m+1,3).'C^{m}_{(1)}}{2.3\ldots(m+1)} + \frac{k(m+1,4) \cdot 'C^{m}_{(1,2)}}{3.4\ldots(m+2)} - \frac{k(m+1,5).'C^{m}_{(1,2,3)}}{4.5\ldots(m+3)} + \ldots\ldots (-)^{m} \cdot \frac{k(m+1,m+2) \cdot C^{m}_{(1,2,\ldots m)}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+m)}$$

§. 49.

Da wir alle Mittel erschöpft haben, welche im Allgemeinen die frühere Untersuchung angegeben hat, so schlagen wir jetzt besondere Wege

ein, die wir in der Eigenthümlichkeit des Falles selbst aufsuchen müssen. Wir nehmen deshalb die vorgegebene Reihe als eine abgekürzte von e^x und setzen

$$E^{-1} = \left\{\frac{e^x - 1}{x}^{-1}\right\} = E^{-1}v1 + E^{-1}v2 \,.\, x^1 + E^{-1}v3 \,.\, x^2 + \ldots$$

Nehmen wir x verneint

$$\left\{\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right\}^{-1} = E^{-1}v1 - E^{-1}v2 \,.\, x^1 + E^{-1}v3 \,.\, x^2 - \ldots.$$

und verbinden beide Reihen erst durch Ab- und dann durch Zuzählen, so entstehen folgende

$$-x = 2 \,.\, E^{-1}v2 \,.\, x^1 + 2 \,.\, E^{-1}v4 \,.\, x^3 + 2 \,.\, E^{-1}v6 \,.\, x^5 + \ldots. \,(\alpha$$

und

$$x \,.\, \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 2E^{-1}v1 + 2E^{-1}v3 \,.\, x^2 + 2E^{-1}v5 \,.\, x^4 + \ldots. \,(\beta$$

Da die Gleichung α für jedes x bestehen muſs, so geht aus ihr hervor, daſs alle Vorzahlen mit geraden Stellenzahlen, ausser der Vorzahl von x verschwinden, oder daſs

109) $\quad E^{-1}v2 = -\frac{1}{2}$ und $E^{-1}v4 = E^{-1}v6 = E^{-1}v8 = \ldots = 0$

Die zweite Gleichung β zeigt, daſs die Vorzahlen mit den ungeraden Stellenzahlen entstehen, wenn die Reihe

$$2 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

durch die Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{x^1}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \ldots.$$

gemessen wird. Dieses Messen erzeugt nach 22 folgende Gleichungen

110) $\quad 2 = \frac{2 \,.\, E^{-1}v1}{1}$

$$\frac{1}{1} = \frac{2 \,.\, E^{-1}v1}{1.2}$$

$$\frac{1}{1.2} = \frac{2 \,.\, E^{-1}v3}{1} + \frac{2 \,.\, E^{-1}v1}{1.2.3}$$

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{2 \cdot E^{-1}v3}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot E^{-1}v1}{1.2.3.4}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{2 \cdot E^{-1}v5}{1} + \frac{2 \cdot E^{-1}v3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot E^{-1}v1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{2 \cdot E^{-1}v5}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot E^{-1}v3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot E^{-1}v1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

. . . . . .

Die Gleichung β ist mehrerer Umformungen fähig; vervielfachen wir zum Beispiele Zähler und Nenner mit $e^{-\frac{x}{2}}$, so wird

$$2E^{-1}v1 + 2E^{-1}v3 \cdot x^2 + 2E^{-1}v5 \cdot x^4 + \ldots = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \cdot x$$

$$= \frac{1 + \frac{x^2}{2.4} + \frac{x^4}{2.4.6.8} + \frac{x^6}{2.4.6.8.10.12} + \ldots\ldots}{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2.4.6} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \ldots\ldots}$$

und wir erhalten hierdurch nach 22 zur Bildung der Glieder unserer Reihe noch folgende Gleichungen

111) $$1 = E^{-1}v1$$

$$\frac{1}{2.4} = E^{-1}v3 + \frac{E^{-1}v1}{4 \cdot 6}$$

$$\frac{1}{2.4.6.8} = E^{-1}v5 + \frac{E^{-1}v3}{4 \cdot 6} + \frac{E^{-1}v1}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$$

. . . . . .

§. 50.

Es sind noch mehrere Verbindungen von

$$\left\{ \frac{e^x - 1}{x} \right\}^{-1}$$

möglich, welche ähnliche Gleichungen wie 110 und 111 erzeugen. Eine von diesen ganz verschiedene zurücklaufende Bildungsweise finden wir auf fol-

gende Art: wir setzen

$$\left\{\frac{e^x - 1}{x}\right\}^{-1} = \varphi(x)$$

und bilden die zweite Potenz von e^x auf zwei verschiedene Weisen, einmal indem wir

$$e^x = 1 + \frac{x}{\varphi x}$$

durch sich selbst vervielfachen, und dann wieder, indem wir in dieser letzten Gleichung $2x$ statt x setzen. Die Gleichung, welche hierdurch entsteht, ist

$$\left\{1 + \frac{x}{\varphi x}\right\}^2 = e^{2x} = 1 + \frac{2x}{\varphi 2x}$$

oder, wenn die unnöthigen Grössen vernachlässigt werden

$$2(\varphi x)^2 = (x + 2\varphi 2x) \cdot \varphi 2x$$

Wir setzen ferner

$$\psi x = E^{-1}v1 + E^{-1}v3 \cdot x^2 + E^{-1}v5 \cdot x^4 + \ldots\ldots$$

so wird

$$\varphi x = E^{-1}v2x^1 + \psi x = -\tfrac{x}{2} + \psi x$$

und die vorstehende Gleichung geht in folgende über

$$\frac{x^2}{4} = (\psi 2x - \psi x) \cdot \psi x$$

Werden nun statt der Zeichen die Reihen, deren Stelle sie vertreten, in diese Gleichung eingeführt,

$$\frac{x^2}{4} = [(2^2-1).E^{-1}v3.x^2 + (2^4-1).E^{-1}v5.x^4 + (2^6-1).E^{-1}v7.x^6 + \ldots.] \times$$
$$\times (E^{-1}v1 + E^{-1}v3 \cdot x^2 + E^{-1}v5 \cdot x^4 + \ldots.)$$

und die Vorzahlen gleichhoher Potenzen von x gleich gesetzt, so erhalten wir eine von den vorigen ganz verschiedene merkwürdige zurücklaufende Bildungsweise

112) $\quad \frac{1}{4} = (2^2-1) \cdot E^{-1}v3 \cdot E^{-1}v1$

$$0 = (2^4-1) \cdot E^{-1}v5 \cdot E^{-1}v1 + (2^2-1) \cdot E^{-1}v3 \cdot E^{-1}v3$$

$$0 = (2^6-1).E^{-1}v7.E^{-1}v1+(2^4-1).E^{-1}v5.E^{-1}v3+(2^2-1).E^{-1}v3.E^{-1}v5$$

. . . . . .

§. 51.

Eine besondere Eigenschaft der zweitheiligen Grösse $e^{2x}-1$ ist, dafs sie in zwei Faktoren zerlegt

$$e^{2x}-1 = (e^x+1)(e^x-1)$$

und dafs der Bruch

$$\frac{2x}{e^{2x}-1} = \frac{2x}{(e^x+1)(e^x-1)}$$

in zwei Brüche

$$\frac{2x}{e^{2x}-1} = \frac{x}{e^x-1} - \frac{x}{e^x+1}$$

zerfällt werden kann. Diese Zerfällung gewährt hier eine Vergleichung zwischen den Gliedern der Entwicklung von D^{-1} und E^{-1}, welche, wenn sie nicht nützlich, doch an und für sich schon merkwürdig genug wäre. Setzen wir nämlich

$$\frac{x}{e^x-1} = E^{-1}v1 + E^{-1}v2 \cdot x^1 + E^{-1}v3 \cdot x^2 + \ldots\ldots$$

$$\frac{2x}{e^{2x}-1} = E^{-1}v1 + 2^1.E^{-1}v2 \cdot x^1 + 2^2.E^{-1}v3.x^2 + \ldots\ldots$$

und

$$\frac{x}{e^x+1} = D^{-1}v1.x + D^{-1}v2 \cdot x^2 + D^{-1}v3 \cdot x^3 + \ldots\ldots$$

so erhalten wir nach obiger Gleichung die Beziehungen zwischen D^{-1} und E^{-1}, nämlich

113) $$(1-2^m) \cdot E^{-1}v(m+1) = D^{-1}vm$$

§. 52.

Diese merkwürdige Gleichung weiset uns auf die frühere Entwicklung von $(e^x+1)^{-1}$ zurück, und giebt uns dadurch Gelegenheit zu einer Menge neuer Gleichungen sowohl für die zurücklaufende als unabhängige Bildungsweise unsers Polynomiums. Zuerst erhalten wir aus 91 die Gleichung

114) $$2^{m+1}(1-2^{m+1}) \,.\, E^{-1}v(m+2) = E^0v(m+1) \,.\, 2^m - E^1vm \,.\, 2^{m-1} + E^2v(m-1) \,.\, 2^{m-2} - \ldots . (-)^m \,.\, E^m v1 \,.\, 2^0$$

aus 93

115) $$m.2^{m+1}.(1-2^{m+1}).E^{-1}v(m+2) = 1.E^2v(m-2).2^{m-3} - 2.E^3v(m-3).2^{m-4} + 3.E^4v(m-4).2^{m-5} - \ldots (-)^{m-1}.(m-2).E^{m-1}v1.2^0$$

aus 94

116) $$2.(1-2^{m+1}).E^{-1}v(m+2) + \frac{(1-2^m).E^{-1}v(m+1)}{1} + \frac{(1-2^{m-1}).E^{-1}vm}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(1-2^1).E^{-1}v2}{1\,.\,2\,\ldots\,m} = 0$$

aus 95

117) $$E^{-1}v(m+2) = \frac{1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots .}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,m\,.\,(2^{m+1}-1)}$$

Von den zurücklaufenden Formen 114 und 115 gehen wir zu den unabhängigen über, wenn wir sie mit 97 und 100 in Verbindung setzen. Wir erhalten hierdurch folgende Gleichungen

aus 114

118) $$1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m \,.\, 2^{m+1} \,.\, (1-2^{m+1}) \,.\, E^{-1}v(m+2) =$$
$$= -1^m \,.\, 2^{m-1}$$
$$- [k(2,2) \,.\, 1^m - k(2,3) \,.\, 2^m] \,.\, 2^{m-2}$$
$$- [k(3,2) \,.\, 1^m - k(3,3) \,.\, 2^m + k(3,4) \,.\, 3^m] \,.\, 2^{m-3}$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$- [k(m,2) \,.\, 1^m - k(m,3) \,.\, 2^m + \ldots (-)^{m-1}k(m,m+1) \,.\, m^m] \,.\, 2^0$$

aus 115

$$119) \quad = -1 \cdot [k(2,2) \cdot 1^{m-1} - k(2,3) \cdot 2^{m-1}] \cdot 2^{m-3}$$
$$- 2 \cdot [k(3,2) \cdot 1^{m-1} - k(3,3) \cdot 2^{m-1} + k(3,4) \cdot 3^{m-1}] \cdot 2^{m-4}$$
$$- 3 \cdot [k(4,2) \cdot 1^{m-1} - k(4,3).2^{m-1} + k(4,4).3^{m-1} - k(4,5).4^{m-1}].2^{m-5}$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$- (m-2)[k(m-1,2).1^{m-1} - k(m-1,3).2^{m-1} + \ldots (-)^{m-2}.k(m-1,m).(m-1)^{m-1}].2^{0}$$

aus 114

$$120) \quad = -1 \cdot \overset{m-1}{'C}_{(1)} \cdot 2^{m-1} + 1 \cdot 2 \cdot \overset{m-2}{'C}_{(1,2)} \cdot 2^{m-2} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \overset{m-3}{'C}_{(1,2,3)} \cdot 2^{m-3}$$
$$+ \ldots . (-)^{m} \cdot 1 \cdot 2 \ldots m \cdot \overset{0}{'C}_{(1,2,\ldots m)} \cdot 2^{0}$$

aus 115

$$121) \quad = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \overset{m-3}{'C}_{(1,2)} \cdot 2^{m-3} - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \overset{m-4}{'C}_{(1,2,3)} \cdot 2^{m-4} +$$
$$+ 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \overset{m-5}{'C}_{(1,2,3,4)} \cdot 2^{m-5} - \ldots (-)^{m-1} \cdot (m-2) \cdot 1.2.3 \ldots (m-1) \cdot \overset{0}{'C}_{(1,2,\ldots m-1)} \cdot 1^{0}$$

Die Gleichungen 109 und 117 in Verbindung zeigen, dafs wenn $m = 2p$ eine gerade Zahl ist

$$122) \quad 1^{2p} - 2^{2p} + 3^{2p} - 4^{2p} + \ldots = 0$$

§. 53.

Nach der Entwicklung eines Polynomiums ist es nach 65 leicht, den Logarithmen der Reihe zu finden. Gehen wir hierbei von der Gleichung 99 aus, setzen $n - 1$ und $m - 1$ statt n und m, so wird

$$(n + m - 1) \cdot E^{n}vm = n \cdot E^{n-1}vm + n \cdot E^{n}v(m-1)$$

Wird nun durch n gemessen und dann $n = 0$ gesetzt, so verschwindet $E^{0}v(m-1)$ so lange m grösser als 2 ist; ist aber $m = 2$, so wird $E^{0}v1 = 1$, und also

123) $$\frac{E^n vm}{n=o} = \frac{E^{-1} vm}{m-1} \text{ und } \frac{E^n v2}{n=o} = E^{-1} v2 + 1$$

Es ist folglich nach 65

124) $$\log : E = \log \left\{ \frac{1}{1} + \frac{x^1}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \ldots \right\} =$$

$$= A^{-1} . \left[(1 + E^{-1} v2) . x^1 + \frac{E^{-1} v3 . x^2}{2} + \frac{E^{-1} v5 . x^4}{4} + \frac{E^{-1} v7 . x^6}{6} + \ldots \right)$$

Entwicklung des Polynomiums

$$H^n = (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots)^n = [-\frac{A}{x} \cdot \log(1 - x)]^n$$

$$= H^n v1 + H^n v2 \cdot x^1 + H^n v3 \cdot x^2 + H^n v4 \cdot x^3 + \ldots.$$

§. 54.

Die zurücklaufende Bildungsweise dieses Polynomiums giebt nach 36 folgende Gleichung an

125) $$\frac{\alpha \cdot H^n v(m+1)}{1} + \frac{(\alpha+\beta) \cdot H^n vm}{2} + \frac{(\alpha+2\beta) \cdot H^n v(m-1)}{3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\alpha+m\beta) \cdot H^n v1}{m+1} = \frac{[\alpha(n+1) + \beta m] \cdot H^{n+1} v(m+1)}{n+1}$$

Aus der Verbindung der willkürlichen Grössen α und β mit den Elementen der vorgegebenen Reihe lassen sich wieder grosse Vortheile ziehen. Wird nämlich zuerst $\alpha = \beta = 1$ gesetzt; so wird

$$H^n v(m+1) + H^n vm + \ldots + H^n v1 = \frac{(m+n+1) \cdot H^{n+1} v(m+1)}{n+1}$$

und wird in dieser Gleichung $m - 1$ statt m eingeführt

$$H^n vm + \ldots + H^n v1 = \frac{(m+n) \cdot H^{n+1} vm}{n+1}$$

Beide Gleichungen in Verbindung erzeugen eine dritte

126) $$(n+m+1) \cdot H^{n+1} v(m+1) = (n+1) \cdot H^n v(m+1) + (m+n) \cdot H^{n+1} vm$$

welche das Bildungsgeschäft der Glieder höherer Potenzen sehr erleichtert, und so beschaffen ist, dafs aus ihr eine einfache zurücklaufende Bildungsweise hergeleitet werden kann. Bei dieser Herleitung gehen wir von der ersten Potenz aus, setzen $n = 1$ und erhalten dadurch die Vorschrift für die Bildung der Glieder der zweiten Potenz, nämlich:

$$(m + 1)(m + 2) \cdot H^2v(m+1) = (m+1)(m+1)H^2vm + 2 \cdot 1$$

und durch diese folgende Werthe

$$H^2v1 = 1$$

$$3 \cdot H^2v2 = 2 \cdot H^2v1 + 1 = 2 + 1$$

$$3.4.H^2v3 = 3.3.H^2v2 + 2.1 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$3.4.5.H^2v4 = 4.4.H^2v3 + 2.1 = 4 \cdot 3.2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 4.2.1 + 3.2.1$$

Das einfache Gesetz, welches wir hier bei den ersteren Gliedern der zweiten Potenz entdecken, findet auch für jedes folgende Glied statt, denn der allgemeine Uebergang vom vorhergehenden Gliede

$$3 \cdot 4 \ldots (m + 1) \cdot H^2vm = \overset{m-1}{C}_{(1,\ 2,\ \ldots\ m)}$$

zu dem folgenden Gliede ist

$$3.4 \ldots (m+2).H^2v(m+1) = (m+1).\overset{m-1}{C}_{1,\ 2,\ \ldots\ m} + m(m-1)\ldots 2.1 = \overset{m}{C}_{1,2,\ldots,m+1}$$

Setzen wir $n = 2$, so erhalten wir zur Bildung der Glieder der dritten Potenz die Gleichung

$$4.5\ldots.(m+3).H^3v(m+1) = 4.5\ldots(m+2) \cdot (m+2) \cdot H^3vm + \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots m+1)}$$

und durch diese folgende Werthe

$$H^3v1 = 1$$

$$4 \cdot H^3v2 = 3 \cdot H^3v1 + \overset{1}{C}_{(1,2)} = 3 + 2 + 1 = \overset{1}{C}_{(1,\ 2,\ 3)}$$

$$4 \cdot 5 \cdot H^3v3 = 4 \cdot \overset{1}{C}_{(1,\ 2,\ 3)} + \overset{2}{C}_{(1,2,3,4)} = \overset{2}{C}$$

$$4.5.6.H^3v4 = 5 \cdot \overset{2}{C} + \overset{3}{C} = \overset{3}{C}$$
$$(1,\ 2,\ 3,\ 4)\ \ (1,2,3,4,5)$$

Der stete und unabänderliche Gang der Rechnung führt immer zu ähnlichen Gebilden. Ist das Glied

$$4 \cdot 5 \ldots \ldots (m+2) \cdot H^3vm = \overset{m-1}{C}_{(1,2,\ldots m+1)}$$

gefunden, so geht das folgende hervor aus der Gleichung

$$4 \cdot 5 \ldots (m+3) \cdot H^3v(m+1) = (m+2) \cdot \overset{m-1}{C}_{(1,2,\ldots m+1)} + \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots,m+2)} = \overset{m}{C}$$

Eben dieser stete und unabänderliche Gang der Rechnung bürgt uns zugleich dafür, dafs auch die Glieder der höhern Potenzen aus geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen bestehen werden. Denn von den Gliedern der nten Potenz, deren Bildungsweise durch

$$(n+1) \ldots (n+m) \cdot H^nv(m+1) = \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots n+m-1)}$$

vorgestellt wird, führt die Gleichung

$$(n+2) \ldots (n+m+1) \cdot H^{n+1}v(m+1) = (n+2) \ldots (n+m) \cdot (n+m) \cdot H^{n+1}vm + \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots n+m-1)}$$

zu den Gliedern der (n+1)ten Potenz. Die ersten Glieder dieser Potenz sind

$$H^{n+1}v1 = 1$$

$$(n+2) \cdot H^{n+1}v2 = (n+1) \cdot H^{n+1}v1 + \overset{1}{C}_{(1,2,\ldots n)} = \overset{1}{C}_{(1,2,\ldots n+1)}$$

$$(n+2)(n+3) \cdot H^{n+1}v3 = (n+2) \cdot \overset{1}{C}_{(1,2,\ldots n+1)} + \overset{2}{C}_{(1,2,\ldots,n+2)} = \overset{2}{C}$$

$$(n+2)(n+3)(n+4) \cdot H^{n+1}v4 = (n+3) \cdot \overset{2}{C}_{(1,2,\ldots,n+2)} + \overset{3}{C}_{(1,2,\ldots,n+3)} = \overset{3}{C}$$

und der Uebergang vom mten Gliede

$$(n+2) \ldots (n+m) \cdot H^{n+1}vm = \overset{m-1}{C}_{(1,2,\ldots,n+m-1)}$$

zu dem (m+1)ten Gliede ist nach obiger Gleichung

$$(n+2) \ldots (n+m+1) \cdot H^{n+1}v(m+1) = (n+m) \cdot \overset{m-1}{C}_{(1,2,\ldots,n+m-1)} + \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots n+m)} = \overset{m}{C}$$

Es ist folglich ganz allgemein für jede bejahete ganze Potenz

$$127) \qquad H^n v(m+1) = \frac{\overset{m}{C}}{(n+1)(n+2) \ldots (n+m)_{(1,2,\ldots,n+m-1)}}$$

§. 55.

Nachdem die unabhängige Bildungsweise der Glieder der bejaheten ganzen Potenzen von H gefunden ist, giebt die Verbindung der Gleichungen 127 und 31 die unabhängige Bildungsweise für jede, also auch für die verneinten und gebrochenen Potenzen, nämlich

$$128)\quad H^n v(m+1) = (-)^{m-1} \cdot \left\{ \frac{k(n,2).k(n-2,m).\overset{m}{C}_{(1,\,2,\,\ldots\,m)}}{2 \cdot 3 \ldots (m+1)} - \right.$$

$$- \frac{k(n,3).k(n-3,m-1) \cdot \overset{m}{C}_{1,2,\ldots m+1}}{3 \cdot 4 \ldots (m+2)} + \frac{k(n,4).k(n-4,m-2) \cdot \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots,m+2)}}{4 \cdot 5 \ldots (m+3)} - \ldots \ldots$$

$$\ldots (-)^{m-1} \cdot \frac{k(n,m+1) \cdot k(n-m-1,1) \cdot \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots,m+m-1)}}{(m+1) \ldots (m+m)}$$

Die allgemeine zurücklaufende Bildungsweise, nach welcher die folgenden aus den vorhergehenden Gliedern derselben Potenz zusammengesetzt werden, erhalten wir aus 38, wenn wir $f = 1$ und $g = n$ setzen, nämlich

$$129)\quad \frac{m.H^n v(m+1)}{1} + \frac{[m-1(n+1)].H^n vm}{2} + \frac{[m-2(n+1)].H^n v(m-1)}{3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{[m - m(n+1)] \cdot H^n v\,1}{m+1} = 0$$

Diese beiden Gleichungen 128 und 129 leisten besonders dann nützliche Dienste, wenn die Gleichung 126 nicht mehr anwendbar ist, und zwar in dem besondern Falle, wenn $n = -1$ ist. In diesem Fall erhalten sie eine einfachere Gestalt und zwar

$$130)\quad H^{-1} v(m+1) = -\frac{k(m+1,3) \cdot \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots m)}}{2.3 \ldots (m+1)} + \frac{k(m+1,4) \cdot \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots,m+1)}}{3.4 \ldots (m+2)}$$

$$- \ldots + \ldots (-)^m \cdot \frac{k(m+1,m+2) \cdot \overset{m}{C}_{(1,\,2,\,\ldots\,m+m-1)}}{(m+1)(m+2) \ldots (m+m)}$$

und

$$131) \quad \frac{H^{-1}v(m+1)}{1} + \frac{H^{-1}vm}{2} + \frac{H^{-1}v(m-1)}{3} + \cdots + \frac{H^{-1}v1}{m+1} = 0$$

§. 56.

Zuletzt gehen wir zu den Logarithmen der vorgegebenen Reihe über und setzen deshalb in der Gleichung 126 $n - 1$ statt n und dann $n = 0$, wodurch folgende entsteht

$$132) \quad \frac{m \cdot H^{n}v(m+1)}{n=0} = \frac{(m-1) \cdot H^{n}vm}{n=0} + H^{-1}v(m+1) + H^{0}vm$$

Wenn m grösser als 1 ist, so verschwindet $H^{0}vm$; ist aber $m = 1$, so wird $H^{0}v1 = 1$ und

$$133) \quad \frac{H^{n}v2}{n=0} = H^{-1}v2 + 1 = -\tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{1}{2}$$

Die Gleichung 132 giebt die zurücklaufende Bildungsweise der Reihe

$$134) \quad \log : H = \log : \left\{ \frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots \right\} =$$

$$= A^{-1} \cdot \left(\frac{H^{n}v2}{n=0} \cdot x^1 + \frac{H^{n}v3}{n=0} \cdot x^2 + \frac{H^{n}v4}{n=0} \cdot x^3 + \cdots \right)$$

$$= \overset{1}{c} \cdot x^1 + \overset{2}{c} \cdot x^2 + \overset{3}{c} \cdot x^3 + \cdots$$

Die unabhängige Bildungsweise ergiebt sich aus den Gleichungen 64 und 127

$$135) \quad A \cdot \overset{m}{c} = \frac{k(m,2) \cdot \overset{m}{C}}{1.2\ldots(m+1)} - \frac{k(m,3) \cdot \overset{m}{C}}{2.3\ldots(m+2)} + \frac{k(m,4) \cdot \overset{m}{C}}{3.4\ldots(m+3)}$$
$$(1,2,\ldots,m) \qquad (1,2,\ldots,m+1) \qquad (1,2,\ldots,m+2)$$

$$- \cdots (-)^{m-1} \cdot \frac{k(m,m+1) \cdot \overset{m}{C}}{m(m+1)\ldots(m+m)}$$
$$(1,2,\ldots,m+m-1)$$

Entwicklung des Polynomiums

$$K^n = [1 + \frac{a}{b} \cdot x^1 + \frac{a(a+f)}{b(b+h)} \cdot x^2 + \frac{a(a+f)(a+2f)}{b(b+h)(b+2h)} \cdot x^3 + \ldots]^n$$

$$= K^n v1 + K^n v2 \cdot x^1 + K^n v3 \cdot x^2 + \ldots\ldots$$

§. 57.

Die allgemeine zurücklaufende Bildungsweise dieses Polynomiums ist nach 36

136) $$\alpha \cdot K^n v(m+1) + \frac{(\alpha+\beta) \cdot a \cdot K^n vm}{b} + \frac{(\alpha+2\beta) \cdot a(a+f) \cdot K^n v(m-1)}{b(b+h)}$$

$$+ \ldots + \frac{(\alpha+m\beta) \cdot a(a+f)\ldots(a+mf-f) \cdot K^n v1}{b(b+h)\ldots(b+mh-h)} = \frac{[\alpha(n+1)+\beta m] \cdot K^{n+1} v(m+1)}{n+1}$$

Durch Benutzung der Eigenthümlichkeiten der vorgegebenen Reihe läfst sich diese sehr vereinfachen; wir setzen zuerst $\alpha = b - h$ und $\beta = h$, und erhalten

$$(b-h) K^n v(m+1) + a \cdot K^n vm + \frac{a(a+f) \cdot K^n v(m-1)}{b} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a(a+f)\ldots(a+mf-f) \cdot K^n v1}{b(b+h)\ldots(b+mh-2h)} = \frac{[(b-h)(n+1)+hm] \cdot K^{n+1} v(m+1)}{n+1}$$

nehmen dann $\alpha = a$, $\beta = f$ und $m - 1$ statt m, und erhalten

$$a \cdot K^n vm + \frac{a(a+f) \cdot K^n v(m-1)}{b} + \ldots + \frac{a(a+f)\ldots(a+mf-f) \cdot K^n v1}{b(b+h)\ldots(b+mh-2h)} =$$

$$= \frac{[a(n+1) + f(m-1)] \cdot K^{n+1} vm}{n+1}$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung erzeugen eine dritte

137) $$(n+1)(b-h) \cdot K^n v(m+1) = [(n+1)b+(m-n-1)h] \cdot K^{n+1} v(m+1) -$$
$$- [(n+1)a + (m-1)f] \cdot K^{n+1} vm$$

welche mit weniger Mühe zu den späteren Gliedern des Polynomiums führt.

§. 58.

Dieselbe Einfachheit findet bei der Entwicklung des Logarithmen der Reihe statt; denn setzen wir in 137 n — 1 statt n und dann n = 0, so wird

$$\frac{m \cdot h \cdot K^n v(m+1)}{n=0} = \frac{(m-1)f \cdot K^n vm}{n=0} + (b-h) \cdot K^{-1} v(m+1) + a \cdot K^0 vm$$

Ist also

$$\log : K = A^{-1}(\overset{1}{c}x^1 + \overset{2}{c}x^2 + \overset{3}{c}x^3 + \ldots)$$

so giebt die Gleichung

138) $$m \cdot h \cdot \overset{m}{c} = (m-1) \cdot f \cdot \overset{m-1}{c} + (b-h) \cdot K^{-1} v(m+1) + a \cdot K^0 vm$$

die zurücklaufende Bildungsweise dieser Reihe an.

§. 59.

Die vorgegebene Reihe ist sehr allgemein, und umfafst ausser den beiden E und H noch mehrere andere Reihen; denn setzen wir

$$a = h = 1, \quad f = 0 \text{ und } b = 2$$

so entsteht E, und setzen wir

$$a = h = f = 1 \text{ und } b = 2$$

so entsteht H. Eine neue Reihe erhalten wir aber, wenn wir

$$a = 1, f = h = 2 \text{ und } b = 3$$

annehmen, wodurch folgende Reihe entsteht

$$\frac{1}{1} + \frac{x^1}{3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} + \ldots = 0$$

für welche nach 137 folgende zurücklaufende Bildungsweise statt findet:

139) $$(n+1) \cdot O^n v(m+1) =$$

$$= (n+2m+1) \cdot O^{n+1} v(m+1) - (n+2m-1) \cdot O^{n+1} vm$$

Für den Logarithmen dieser Reihe

$$\log : \left(\frac{1}{1} + \frac{x^1}{3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} + \ldots\right) = \overset{1}{c} \cdot x^1 + \overset{2}{c} \cdot x^2 + \overset{3}{c} \cdot x^3 + \ldots$$

erhalten wir folgende Gleichung

140) $$2m \cdot \overset{m}{c} = 2(m-1) \cdot \overset{m-1}{c} + 0^{-1}v(m+1) + 0^{0}vm$$

VIERTE ABHANDLUNG.

Theile des Binomiums.

§. 60.

Das Binomium zerfällt durch die verschiedenen Zeichen $\pm$ in zwei Theile

$$(a \pm b)^n = k(n,1) \cdot a^n + k(n,3) \cdot a^{n-2}b^2 + k(n,5) \cdot a^{n-4}b^4 + \ldots$$
$$\pm [k(n,2) \cdot a^{n-1}b^1 + k(n,4) \cdot a^{n-3}b^3 + k(n,6) \cdot a^{n-5}b^5 + \ldots]$$

Wir wollen diese Theile als für sich bestehende Grössen oder als eigenthümliche Gebilde aus a und b betrachten. Damit aber in diesen Gebilden die Grundgrössen a und b unverändert bleiben, so werde b mit dem Buchstaben i verbunden, welcher diese verschiedenen Zeichen oder auch jede andere Grösse vertreten mag, so dafs ist

$$(a+ib)^n = k(n,1) \cdot a^n + k(n,3) \cdot a^{n-2}b^2 \cdot i^2 + k(n,5) \cdot a^{n-4}b^4 \cdot i^4 + \ldots$$
$$+ i[k(n,2) \cdot a^{n-1}b^1 + k(n,4) \cdot a^{n-3}b^3 \cdot i^2 + k(n,6) \cdot a^{n-5}b^5 \cdot i^4 + \ldots]$$

Wir geben diesen Theilen des Binomiums besondere Zeichen φ und ψ, so dafs

141) $$\varphi n = k(n,1) \cdot a^n + k(n,3) \cdot a^{n-2}b^2 \cdot i^2 + \ldots\ldots$$

und

142) $$\psi n = k(n,2) \cdot a^{n-1}b^1 + k(n,4) \cdot a^{n-3}b^3 \cdot i^2 + \ldots\ldots$$

Beide Theile verbindet die Gleichung zu einem Ganzen

143) $$\varphi n + i \cdot \psi n = (a + i \cdot b)^n$$

§. 61.

Dadurch, dafs i in den Gebilden φn und ψn nur mit geraden Potenzen vorkommt, erleiden diese durch ein verneintes i keine Veränderung, und eben dieser Umstand, dafs die verschiedenen Zeichen von i keinen Einflufs auf die Gebilde φ und ψ haben, macht es möglich, diese Grössen auf verschiedene Arten verbinden zu können, ohne Rücksicht auf die verschiedenen Werthe der Grössen φ und ψ selbst nehmen zu müssen. Geben wir z. B. dem i verschiedene Zeichen

$$\varphi n + i \,.\, \psi n = (a + i \,.\, b)^n$$
$$\varphi n - i \,.\, \psi n = (a - i \,.\, b)^n$$

so erhalten wir durch Zu- und Abzählen zwei Gleichungen

144) $$2 \,.\, \varphi n = (a + i \,.\, b)^n + (a - i \,.\, b)^n$$

und

145) $$2 \,.\, i \,.\, \psi n = (a + i \,.\, b)^n - (a - i \,.\, b)^n$$

welche die einzelnen Theile des Binomiums als Summe und Unterschied zweier Binomien darstellen.

§. 62.

Nur n, welches jede mögliche Grösse vertritt, und den Gebilden φ und ψ eine Allgemeinheit giebt, welche dem Binomium zukommt, wovon sie Theile sind, kann Veränderungen in den Gebilden φ und ψ hervorbringen. Nehmen wir $n = 1$ an, so erhalten wir die ursprünglichen Grössen a und b selbst

$$\varphi 1 = a \quad \text{und} \quad \psi 1 = b$$

Die Grundgrössen a und b stehen also in denselben Beziehungen gegen einander, als die Gebilde φn und ψn, oder vielmehr: a ist das erste Glied der Reihe, welche entsteht, wenn dem n alle mögliche Werthe gegeben werden. Eben so steht b gegen ψn. Die obigen Gleichungen müssen also auf folgende Art dargestellt werden:

146) $\varphi n = k(n,1) \cdot (\varphi_1)^n + k(n,3) \cdot (\varphi_1)^{n-2} \cdot (\psi_1)^2 \cdot i^2 + + k(n,5) \cdot (\varphi_1)^{n-4}(\psi_1)^4 \cdot i^4 + \ldots.$

und

147) $\psi n = k(n,2) \cdot (\varphi_1)^{n-1}\psi_1 + k(n,4) \cdot (\varphi_1)^{n-3}(\psi_1)^3 \cdot i^2 + \ldots$

148) $\varphi n + i \cdot \psi n = (\varphi_1 + i \cdot \psi_1)^n$

Diese Gleichungen zeigen, wie die späteren Glieder in den Reihen

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi 3, \varphi 4, \ldots, \varphi n, \ldots.$ (A

$\psi_1, \psi_2, \psi 3, \psi 4, \ldots, \psi n, \ldots.$ (B

aus den ersteren Gliedern φ_1 und ψ_1 gebildet werden. Es kann aber auch jedes Glied aus irgend einem andern beliebigen vorhergehenden oder folgenden Gliede hergeleitet werden, denn

$$\varphi(m.n)+i.\psi(m.n) = (\varphi_1+i.\psi_1)^{m.n} = [(\varphi_1+i.\psi_1)^m]^n = (\varphi m+i.\psi m)^n =$$
$$= k(n,1) \cdot (\varphi m)^n + k(n,3) \cdot (\varphi m)^{n-2} \cdot (\psi m)^2 \cdot i^2 + \ldots..$$
$$\ldots + i[k(n,2).(\varphi m)^{n-1} \cdot \psi m + k(n,4).(\varphi m)^{n-3}(\psi m)^3.i^2 + \ldots]$$

und folglich

149) $\varphi(m.n) = k(n,1) \cdot (\varphi m)^n + k(n,3) \cdot (\varphi m)^{n-2} \cdot (\psi m)^2 \cdot i^2 + \ldots$

und

150) $\psi(m.n) = k(n,2).(\varphi m)^{n-1} \cdot \psi m + k(n,4).(\varphi m)^{n-3}(\psi m)^3 \cdot i^2 + \ldots$

Es werden also $\varphi(m.n)$ und $\psi(m.n)$ eben so aus φm und ψm gebildet, als φm und ψm aus φ_1 und ψ_1.

Jedes Glied der beiden Reihen A und B kann aber auch aus mehreren andern Gliedern zusammengesetzt werden; denn zerlegen wir das Binomium in zwei einfachere

$$(\varphi_1+i.\psi_1)^{m+n} = (\varphi_1+i.\psi_1)^m \cdot (\varphi_1+i.\psi_1)^n = (\varphi m+i.\psi m) \cdot (\varphi n+i.\psi n)$$
$$= \varphi m \cdot \varphi n + i^2 \cdot \psi m \cdot \psi n + i \cdot (\varphi m \cdot \psi n + \psi m \cdot \varphi n)$$

und bemerken, dafs ohne diese Zerlegung

$$(\varphi_1 + i \cdot \psi_1)^{m+n} = \varphi(m+n) + i \cdot \psi(m+n)$$

ist, so gewinnen wir, da dem ersten Theile $\varphi(m+n)$ die beiden ersten Produkte mit geraden Potenzen von i, und dem zweiten Theile $i.\psi(m+n)$ die beiden Produkte mit den ungeraden Potenzen von i entsprechen, zwei Gleichungen

151) $$\varphi(m+n) = \varphi m \cdot \varphi n + i^2 \cdot \psi m \cdot \psi n$$

und

152) $$\psi(m+n) = \varphi m \cdot \psi n + \psi m \cdot \varphi n$$

welche die Vorschrift enthalten, wie aus zwei frühern Gliedern ein späteres Glied gebildet, oder wie ein späteres Glied in zwei frühere Glieder zerlegt wird. Es ist leicht nach dieser Vorschrift die Zerlegung weiter zu verfolgen und

$\varphi(m+n+p), \varphi(m+n+p+q), \ldots$ und so auch $\psi(m+n+p), \psi(m+n+p+q), \ldots$ in einfachere Glieder

$$\varphi m, \varphi n, \varphi p, \varphi q, \ldots \text{ und } \psi m, \psi n, \Psi p, \psi q, \ldots$$

aufzulösen. Ohne uns aber an diese Vorschrift zu halten, können wir, wenn wir von der frühern Gleichung 3 Anwendung machen, diese Zerlegung vornehmen. Es ist nämlich

$$\varphi(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}+\overset{3}{n}+\ldots+\overset{m}{n})+i.\psi(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}+\ldots+\overset{m}{n}) = (\varphi_1+i.\psi_1)^{\overset{1}{n}+\overset{2}{n}+\ldots+\overset{m}{n}} =$$

$$= (\varphi_1+i.\psi_1)^{\overset{1}{n}}.(\varphi_1+i.\psi_1)^{\overset{2}{n}}\ldots.(\varphi_1+i.\Psi_1)^{\overset{m}{n}} = (\varphi\overset{1}{n}+i.\psi\overset{1}{n})(\varphi\overset{2}{n}+i.\psi\overset{2}{n})\ldots(\varphi\overset{m}{n}+i.\psi\overset{m}{n})$$

$$= \overset{m,0}{C} + i.\overset{m-1,1}{C} + i^2.\overset{m-2,2}{C} + \ldots + i^m.\overset{0,m}{C}$$

$$(\varphi\overset{1}{n}, \varphi\overset{2}{n}, \ldots, \varphi\overset{m}{n}, \psi\overset{1}{n}, \psi\overset{2}{n}, \ldots \psi\overset{m}{n})$$

und folglich

153) $$\varphi(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}+\ldots+\overset{m}{n}) = \overset{m,0}{C} + i^2.\overset{m-2,2}{C} + i^4.\overset{m-4,4}{C} + \ldots.$$

und

154) $$\psi(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}+\ldots\overset{m}{n} = \overset{m-1,1}{C} + i^2.\overset{m-3,3}{C} + i^4.\overset{m-5,5}{C} + \ldots.$$

$$(\varphi\overset{1}{n}, \ldots, \varphi\overset{m}{n}.\psi\overset{1}{n}, \ldots, \psi\overset{m}{n})$$

Es ist schon oben erwähnt, dafs in diesen Gebilden n jede mögliche Grösse vertritt, und dafs also auch n verneint seyn kann; hierdurch erweitern sich die beiden obigen Reihen A und B auch nach der linken Seite;

$\ldots \varphi{-n}, \ldots, \varphi{-3}, \varphi{-2}, \varphi{-1}, \varphi 0, \varphi{+1}, \varphi{+2}, \varphi{+3}, \ldots, \varphi{+n}, \ldots$ (A

$\ldots \psi{-n}, \ldots, \psi{-3}, \psi{-2}, \psi{-1}, \psi 0, \psi{+1}, \psi{+2}, \psi{+3}, \ldots, \psi{+n}, \ldots$ (B

Beide Reihen gehen auf beiden Seiten ins Unendliche fort; die Gleichun-

gen, welche wir für die Glieder auf der rechten Seite gefunden haben, gelten auch für die Glieder auf der linken Seite, und sie zeigen ganz allgemein, wie irgend ein Glied in den beiden Reihen aus einem oder aus mehreren Gliedern aus jeder Reihe gebildet werden kann. Es ist noch übrig, den Gegensatz der Glieder auf der linken und rechten Seite näher zu untersuchen. Indem wir in den Gleichungen 144 und 145 n verneint annehmen, so lassen sie folgende Verwandlungen zu

$$2\varphi - n = (\varphi_1 + i.\psi_1)^{-n} + (\varphi_1 - i.\psi_1)^{-n} = \frac{(\varphi_1 + i.\psi_1)^n + (\varphi_1 - i.\psi_1)^n}{(\varphi_1 + i.\psi_1)^n (\varphi_1 - i.\psi_1)^n} =$$

$$= \frac{2\varphi + n}{[(\varphi_1)^2 - i^2.(\psi_1)^2]^n}$$

und

$$2 . i . \psi - n = (\varphi_1 + i . \psi_1)^{-n} - (\varphi_1 - i . \psi_1)^{-n} =$$

$$= - \frac{(\varphi_1 + i . \psi_1)^n - (\varphi_1 - i . \psi_1)^n}{(\varphi_1 + i . \psi_1)^n (\varphi_1 - i . \psi_1)^n} = - \frac{2 . i . \psi + n}{[(\varphi_1)^2 - i^2 . (\psi_1)^2]^n}$$

$(\varphi_1)^2 - i^2 . (\psi_1)^2$ ist also die vermittelnde Grösse zwischen den Gliedern auf der linken und rechten Seite; wir wollen sie deshalb durch ein besonderes Zeichen bemerkbar machen, und sie

155) $(\varphi)^2 - i^2 . (\psi_1)^2 = \delta^2$ oder $(\varphi n)^2 - i^2 . (\psi n)^2 = \delta^{2n}$

setzen. Es ist also

156) $\varphi - n = \delta^{-2n} . \varphi + n$ und $\psi - n = - \delta^{-2n} . \psi + n$

Die Werthe der Mittelglieder φo und ψo erhalten wir aus 146 und 147 nämlich

157) $\varphi o = + 1$ und $\psi o = o$

§. 63.

Ausser diesen verschiedenen Bildungsweisen der Glieder der Reihen A und B giebt es noch andere, wozu die beiden Gleichungen 144 und 145, welche die Glieder der Reihen als Summen und Unterschiede zweier Binomien darstellen, Veranlassung geben. Wir setzen wegen der Kürze

$$\varphi_1 + i \cdot \psi_1 = y \quad \text{und} \quad \varphi_1 - i \cdot \psi_1 = z$$

und entwickeln die Binomien

$$y^n = (y+z-z)^n = (y+z)^n - k(n,2).(y+z)^{n-1}z^1 + k(n,3).(y+z)^{n-2}z^2 - \ldots$$

und

$$z^n = (y+z-y)^n = (y+z)^n - k(n,2).(y+z)^{n-1}y^1 + k(n,3).(y+z)^{n-2}y^2 - \ldots$$

Verbinden wir diese Binomien durch Zu- und Abzählen und bemerken hierbei, dafs

$(y+z)^{n-p}(y^p+z^p) = (2.\varphi_1)^{n-p} \cdot 2\varphi p$ und $(y+z)^{n-p}(y^p-z^p) = (2\varphi_1)^{n-p}.2i.\psi p$

so erhalten wir die beiden Gleichungen

158) $$\varphi n = (2\varphi_1)^n - k(n,2).(2\varphi_1)^{n-1}.\varphi_1 + k(n,3).(2\varphi_1)^{n-2}.\varphi 2 - \\ - k(n,4) \cdot (2\varphi_1)^{n-3}\varphi 3 + \ldots$$

und

159) $$\psi n = k(n,2).(2\varphi_1)^{n-1}.\psi_1 - k(n,3).(2\varphi_1)^{n-2}.\psi 2 + k(n,4).(2\varphi_1)^{n-3}.\psi 3 - \ldots$$

welche zeigen, wie die späteren Glieder aus allen ihren früheren Gliedern gebildet werden.

Wir können die obigen Binomien noch auf eine andere Art entwickeln, nämlich

$$y^n = (z+y-z)^n = z^n + k(n,2).z^{n-1}.(y-z)^1 + k(n,3).z^{n-2}.(y-z)^2 + \ldots\ldots$$

und

$$z^n = [y-(y-z)]^n = y^n - k(n,2).y^{n-1}.(y-z)^1 + k(n,3).y^{n-2}.(y-z)^2 - \ldots$$

Beide in Verbindung führen vermittelst der Gleichungen

$(y-z)^p(y^{n-p}-z^{n-p}) = (2.i.\psi_1)^p.2i.\psi(n-p)$ und

$(y-z)^p(y^{n-p}+z^{n-p}) = (2.i.\psi_1)^p.2\varphi(n-p)$

zu folgenden

160) $$\begin{aligned} 0 = {} & k(n,2).(2\psi_1)^1.\psi(n-1) - k(n,3).(2\psi_1)^2.\varphi(n-2) \\ & + k(n,4).(2\psi_1)^3.\psi(n-3).i^2 - k(n,5).(2\psi_1)^4.\varphi(n-4).i^2 \\ & + k(n,6).(2\psi_1)^5.\psi(n-5).i^4 - k(n,7).(2\psi_1)^6.\varphi(n-6).i^4 \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

und

$$161)\quad 2.\psi n = k(n,2).(2\psi_1)^1.\varphi(n-1) - k(n,3).(2\psi_1)^2.\psi(n-2).i^2$$
$$+ k(n,4).(2\psi_1)^3.\varphi(n-3).i^2 - k(n,5).(2\psi_1)^4.\psi(n-4).i^4$$
$$+ k(n,6).(2\psi_1)^5.\varphi(n-5).i^4 - k(n,7).(2\psi_1)^6.\psi(n-6).i^6$$
$$+ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Diese beiden Gleichungen 160 und 161 haben denselben Zweck, als die beiden vorigen 158 und 159, sind aber darin von ihnen verschieden, dafs in 160 und 161 die Glieder beider Reihen A und B abwechselnd vorkommen.

Bei allen diesen Bildungsgesetzen, selbst in den ursprünglichen 146 und 147, werden jedoch zur Bildung eines späteren Gliedes Glieder aus beiden Reihen A und B erfordert. Wir legen uns jetzt die Aufgabe vor: Wie wird ein späteres Glied nur aus einem Gliede einer der Reihen A und B gebildet?

Diese Aufgabe können wir auf zwei verschiedene Arten lösen; die erste ist folgende: Wir führen in die Gleichungen 146 und 147, welche die ursprüngliche Bildungsweise von φn und ψn enthalten, statt φ_1 den Werth desselben aus 155 genommen und statt der Potenzen von φ_1 die entwickelten Binomien

$$(\varphi_1)^p = [\delta^2 + i^2 . (\psi_1)^2]^{\frac{p}{2}}$$

ein. Die zweite Art, welche wir hier ausführlich vorlegen werden, ist folgende: Wir führen in die Gleichungen 144 und 145, welche die Glieder der Reihen A und B als Summe und Unterschiede zweier Binomien darstellen, den Werth von

$$\varphi_1 = [\delta^2 + i^2 . (\psi_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ein und setzen

$$\delta^2 (\varphi_1 + i . \psi_1)^{-1} \quad \text{statt} \quad \varphi_1 - i . \psi_1$$

Hierdurch gewinnen die erwähnten Gleichungen folgende Gestalt:

$$2\varphi n = (i\psi_1)^n \left\{1 + \left[1 + \left(\frac{\delta}{i\psi_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^n + \delta^{2n} . (i\psi_1)^{-n} . \left\{1 + \left[1 + \left(\frac{\delta}{i\psi_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-n}$$

und

$$2i\psi n = (i\psi_1)^n \{1+[1+(\frac{\delta}{i\psi_1})^2]^{\frac{1}{2}}\}^n - \delta^{2n}(i\psi_1)^{-n}\{1+[1+(\frac{\delta}{i\psi_1})^2]^{\frac{1}{2}}\}^{-n}$$

Diese Verwandlungen setzen uns in den Stand, hier von den früheren Entwicklungen des Binomiums

$$[1+(1+x^2)^{\frac{1}{2}})$$

Anwendung zu machen; wir erhalten nach 81

162) $$2\varphi n = (2i\psi_1)^n + \tfrac{n}{1}.k(n-2,1).(2.i\psi_1)^{n-2}.\delta^2 + \tfrac{n}{2}.k(n-3,2).(2.i.\psi_1)^{n-4}.\delta^4 + \ldots$$
$$\ldots + \delta^{2n}\{(2i\psi_1)^{-n} - \tfrac{n}{1}.k(-n-2,1).(2.i\psi_1)^{-n-2}.\delta^2 -$$
$$- \tfrac{n}{2}.k(-n-3,2).(2.i.\psi_1)^{-n-4}.\delta^4 - \ldots\}$$

und

163) $$2.i.\psi n = (2i.\psi_1)^n + \tfrac{n}{1}.k(n-2,1).(2.i.\psi_1)^{n-2}.\delta^2 + \ldots$$
$$- \delta^{-2n}[(2.i.\psi_1)^{-n} - \tfrac{n}{1}k(-n-2,1).(2.i.\psi_1)^{-n-2}.\delta^2 - \ldots]$$

und nach 83

164) $$\varphi n = \delta^n + \frac{n}{2}.\frac{n}{1}.(i\psi_1)^2.\delta^{n-2} + \frac{n}{4}.\frac{(n+2)n(n-2)}{1.2.3}(i\psi_1)^4.\delta^{n-4}$$
$$+ \frac{n}{6}.\frac{(n+4)(n+2)n(n-2)(n-4)}{1.2.3.4.5}.(i\psi_1)^6.\delta^{n-6} + \ldots$$

und

165) $$i.\psi n = \frac{n}{1}.(i\psi_1)^1.\delta^{n-1} + \frac{n}{3}.\frac{(n+1)(n-1)}{1.2}.(i\psi_1)^3.\delta^{n-3}$$
$$+ \frac{n}{5}.\frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)}{1.2.3.4}.(i\psi_1)^5.\delta^{n-5} + \ldots$$

Diese vier Entwicklungen 162, 163, 164, 165 geben jedes Glied der beiden Reihen A, B aus dem ersten Gliede ψ_1 der zweiten Reihe B. Wollen wir φn und ψn aus dem ersten Gliede φ_1 der ersten Reihe A herleiten, so müfsen wir in die Gleichungen 146 und 147 den Werth von

$$i\psi_1 = [(\varphi_1)^2 - \delta^2]^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\varphi_1 - i\psi_1 = \delta^2 (\varphi_1 - i\psi_1)^{-1}$$

einführen, wodurch sie in folgende übergehen

$$2\varphi n = (\varphi_1)^n \left\{1 + \left[1 - \left(\frac{\delta}{\varphi_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^n + \delta^{2n} . (\varphi_1)^{-n} . \left\{1 + \left[1 - \left(\frac{\delta}{\varphi_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-n}$$

und

$$2i\psi n = (\varphi_1)^n \left\{1 + \left[1 - \left(\frac{\delta}{\varphi_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^n - \delta^{2n} . (\varphi_1)^{-n} . \left\{1 + \left[1 - \left(\frac{\delta}{\varphi_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-n}$$

Setzen wir nun in 8_1, $x = \frac{\delta}{\varphi_1} . \sqrt{-1}$, so gewinnen wir folgende Gleichungen

166)
$$2 . \varphi n = (2\varphi_1)^n - \frac{n}{1} . k(n-2,1) (2\varphi_1)^{n-2} . \delta^2 + \frac{n}{2} k(n-3,2) (2\varphi_1)^{n-4} \delta^4 - \ldots.$$
$$+ \delta^{2n} \left[(2\varphi_1)^{-n} + \frac{n}{1} k(-n-2,1) (2\varphi_1)^{-n-2} \delta^2 - \frac{n}{2} k(-n-3,2) (2\varphi_1)^{-n-4} \delta^4 + \ldots.\right]$$

und

167)
$$2 . i\psi n = (2\varphi_1)^n - \frac{n}{1} k(n-2,1) (2\varphi_1)^{n-2} \delta^2 + \ldots - \ldots$$
$$- \delta^{2n} \left[(2\varphi_1)^{-n} + \frac{n}{1} k(-n-2,1) (2\varphi_1)^{-n-2} \delta^2 - \ldots + \ldots.\right]$$

§. 64.

Unser Geschäft bestand bis jetzt in dem Ableiten irgend eines Gliedes aus einem oder aus mehreren Gliedern der Reihen A und B; wir wollen weiter gehen, und die höheren Potenzen eines Gliedes durch einfache Glieder der Reihen darstellen. Die zweifache Entwicklung des Binomiums

$$(2\varphi n)^m = [(\varphi n + i\psi n) + (\varphi n - i\psi n)]^m = (u+v)^m$$

nach u und dann nach v

$$(2\varphi n)^m = u^m + k(m,2).u^{m-2}.\delta^{2n} + k(m,3).u^{m-4}.\delta^{4n} + \ldots$$
$$= v^m + k(m,2).v^{m-2}.\delta^{2n} + k(m,3).v^{m-4}.\delta^{4n} + \ldots$$

wo $u.v = \delta^{2n}$ gesetzt ist, führt hier schnell zum Ziele; denn werden diese zusammengezählt, und

$$u^q + v^q = (\varphi n + i.\psi n)^q + (\varphi n - i.\psi n)^q = (\varphi 1 + i\psi 1)^{nq} + (\varphi 1 - i\psi 1)^{nq} = 2\varphi(nq)$$

gesetzt, so entsteht die Gleichung

168) $(2\varphi n)^m = \varphi m.n + k(m,2).\varphi(mn-2n).\delta^{2n} + k(m,3).\varphi(mn-4n)\delta^{4n} + \ldots$

Verfahren wir eben so bei der Gleichung

$$(2.i.\psi n)^m = (u-v)^m$$

so erhalten wir durch Zuzählen der Gleichungen

$$(2.i\psi n)^m = u^m - k(m,2).u^{m-2}.\delta^{2u} + k(m,3).u^{m-4}.\delta^{4n} - \ldots.$$
$$= (-v)^m - k(m,2).(-v)^{m-2}.\delta^{2n} + k(m,3).(-v)^{m-4}.\delta^{4n} - \ldots$$

für ein gerades m

169) $(2i.\psi n)^m = \varphi mn - k(m,2).\varphi(mn-2n).\delta^{2n} + k(m,3).\varphi(mn-4n).\delta^{4n} - \ldots$

und für ein ungerades m

170) $(2.i\psi n)^m = i.[\psi mn - k(m,2).\psi(mn-2n).\delta^{2n} + k(m,3).\psi(mn-4n).\delta^{4n} - \ldots$

§. 65.

Auf gleiche Weise lassen sich auch Produkte zweier Glieder durch andere Glieder der Reihen A und B darstellen; dasselbe Mittel wie im §. 64 führt hier zum Ziele, so ist, wenn

$$\varphi 1 + i.\psi 1 = y \text{ und } \varphi 1 - i.\psi 1 = z$$

gesetzt wird,

$$(2\varphi n)^p (2\varphi m)^q = (y^n + z^n)^p . (y^m + z^m)^q$$
$$= k(p,1).k(q,1).y^{np+mq} + k(p,2).k(q,1).y^{n(p-2)+mq}.\delta^{2n} + \ldots$$
$$+ k(p,1).k(q,2).y^{np+m(q-2)}.\delta^{2m} + k(p,2).k(q,2).y^{n(p-2)+m(q-2)}.\delta^{2n+2m} + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und wenn die Produkte nach z gereihet werden

$$= k(p,1) \cdot k(q,1) \cdot z^{np+mq} + k(p,2) \cdot k(q,1) z^{n(p-2)+mq} \cdot \delta^{2n} + \ldots$$
$$+ k(p,1) \cdot k(q,2) \cdot z^{np+m(q-2)} \cdot \delta^{2m} + k(p,2) \cdot k(q,2) \cdot z^{n(p-2)+m(q-2)} \cdot \delta^{2n+2m} + .$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Werden beide Gleichungen zusammengezählt, so wird

171) $(2\varphi n)^p \cdot (2\varphi m)^q = k(p,1) \cdot k(q,1) \cdot \varphi(np+mq)$
$$+ k(p,2) \cdot k(q,1) \cdot \varphi[n(p-2)+mq] \cdot \delta^{2n} + \ldots.$$
$$+ k(p,1) \cdot k(q,2) \cdot \varphi[np+m(q-2)] \cdot \delta^{2m}$$
$$+ k(p,2) \cdot k(q,2) \cdot . \varphi[n(p-2)+m(q-2)] \cdot \delta^{2n+2m} + . .$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Eben so können die Produkte

$(2i\psi n)^p \cdot (2i\psi m)^q$ und $(2\varphi n)^p \cdot (2i\psi m)^q$ durch einfache Glieder der Reihen A und B dargestellt werden.

§. 66.

Aus den beiden Reihen A und B kann durch Messen noch eine dritte Reihe gebildet werden, welche Gegenstand einer besondern Untersuchung seyn kann, nämlich

$$\ldots \frac{\psi -n}{\varphi -n}, \ldots\ldots, \frac{\psi -1}{\varphi -1}, \frac{\psi 0}{\varphi 0}, \frac{\psi +1}{\varphi +1}, \ldots, \frac{\psi +n}{\varphi +n}, \ldots\ldots \text{ (R}$$

oder, wenn wir die Glieder dieser Reihe durch τ bezeichnen

$$\ldots \tau -n, \ldots, \tau -1, \tau 0, \tau +1, \ldots, \tau +n \ldots\ldots \text{ (R}$$

Die Glieder dieser Reihe können nun entweder durch Messen der Glieder aus den beiden ersten Reihen A und B gebildet werden, oder sie können, wenn irgend ein Glied der Reihe R als schon gebildet angenomme wird aus diesem gebildeten Gliede hergeleitet werden, denn es ist

$$\tau n = \frac{\psi n}{\varphi n} = \frac{(\varphi 1 + i\psi 1)^n - (\varphi 1 - i\psi 1)^n}{(\varphi 1 + i\psi 1)^n + (\varphi 1 - i\psi 1)^n} \cdot \frac{1}{i}$$

und wenn Zähler und Nenner durch $(\varphi 1)^n$ gemessen werden

172) $$\tau n = \frac{(1+i\tau 1)^n - (1-i\tau 1)^n}{(1+i\tau 1)^n + (1-i\tau 1)^n} \cdot \frac{1}{i}$$

$$= \frac{k(n,2).(\tau 1)^1 + k(n,4).(\tau 1)^3.i^2 + k(n,6).(\tau 1)^5.i^4 + \ldots}{1 + k(n,3).(\tau 1)^2.i^2 + k(n,5).(\tau 1)^4.i^4 + \ldots}$$

So wie τn aus $\tau 1$ gebildet wird, so wird auch $\tau(m.n)$ aus τm gebildet, denn werden 149 und 150 durch $(\varphi m)^n$ gemessen, so entsteht

173) $$\tau(m.n) = \frac{k(n,2).(\tau m)^1 + k(n,4).(\tau m)^3.i^2 + k(n,6).(\tau m)^5.i^4 + \ldots.}{1 + k(n,3).(\tau m)^2.i^2 + k(n,5).(\tau m)^4.i^4 + \ldots..}$$

Auch kann ein späteres Glied aus mehreren früheren Gliedern gebildet werden, denn werden die Gleichungen 153 und 154 durch

$$\overset{1}{\varphi} n \times \overset{2}{\varphi} n \times \overset{3}{\varphi} n \times \ldots\ldots \times \overset{m}{\varphi} n$$

gemessen, so entsteht die Gleichung

174) $$\tau(\overset{1}{n} + \overset{2}{n} + \overset{3}{n} + \ldots + \overset{m}{n}) = \frac{\overset{1}{C} + i^2.\overset{3}{C} + i^4.\overset{5}{C} + i^6.\overset{7}{C} + \ldots.}{1 + i^2.\overset{2}{C} + i^4.\overset{4}{C} + i^6.\overset{6}{C} + \ldots.}$$

$$(\overset{1}{\tau} n, \overset{2}{\tau} n, \ldots\ldots\ldots, \overset{m}{\tau} n)$$

Für die Glieder auf der linken Seite im Gegensatze der Glieder auf der rechten Seite finden wir, dafs

$$\tau - n = \frac{\psi - n}{\varphi - n} = \frac{-\delta^{-2n}.\psi + n}{\delta^{-2n}.\varphi + n} = -\frac{\psi + n}{\varphi + n}$$

und dafs

175) $$\tau - n = -\tau + n$$

Die Glieder auf der linken Seite sind also den Gliedern auf der rechten Seite gleich aber entgegengesetzt.

Das Mittelglied ist

176) $$\tau 0 = \frac{\psi 0}{\varphi 0} = \frac{0}{1} = 0$$

§. 67.

Die Gröfsen φn und ψn werden zwar aus den ersten Gliedern $\varphi 1$ und $\psi 1$ gebildet; sind aber diese Grundgröfsen $\varphi 1$ und $\psi 1$ einmal bestimmt, so hängt der Werth der übrigen Glieder einzig von n ab. Die Gröfsen $\varphi 1$ und $\psi 1$ treten hiedurch gegen n zurück, und müssen nun auch in der Entwickelung als untergeordnete Gröfsen, dagegen n als Hauptgröfse behandelt werden, oder, was dasselbe ist, in der Entwickelung, welche wir jetzt für φn und ψn suchen, mufs n als reihendes Element erscheinen.

Bei diesem Geschäfte können wir denselben Weg, wie in §. 27. einschlagen, oder ohne uns in jene Weitläufigkeiten, welche dort nicht zu vermeiden waren, einzulassen, hier auf einem kürzeren Wege unser Ziel verfolgen. Indem wir nämlich von den Wahrheiten, welche dort gefunden sind, Anwendung machen, erhalten wir sogleich aus den beiden Gleichungen

$$2\varphi n = (\varphi 1 + i.\psi 1)^n + (\varphi 1 - i.\psi 1)^n = y^n + z^n$$

und

$$2.i\psi n = (\varphi 1 + i\,\psi 1)^n - (\varphi 1 - i.\psi 1)^n = y^n - z^n$$

nach 53 und 69 die verlangte Entwickelung.

177) $$2\varphi n = 2 + \frac{\lg:y + \lg:z}{1} . n^1 + \frac{(\lg:y)^2 + (\lg:z)^2}{1 . 2} . n^1$$
$$+ \frac{(\lg:y)^3 + (\lg:z)^3}{1 . 2 . 3} . n^3 + \frac{(\lg:y)^4 + (\lg:z)^4}{1 . 2 . 3 . 4} n^4 + \ldots.$$

und

178) $$2.i\psi n = \frac{\lg:y - \lg:z}{1} . n^1 + \frac{(\lg:y)^2 - (\lg:z)^2}{1 . 2} . n^2$$
$$+ \frac{(\lg:y)^3 - (\lg:z)^3}{1 . 2 . 3} . n^3 + \ldots..$$

Eine zweite Entwickelung nach den Potenzen von n erhalten wir durch Zerlegung von y^n und z^n in zwei Faktoren

$$y^n = y^{\frac{n}{2}} . y^{\frac{n}{2}} \text{ und } z^n = z^{\frac{n}{2}} . z^{\frac{n}{2}}$$

Wenn wir hiebei zugleich berücksichtigen, dafs

$$y \,.\, z = \delta^2 \text{ also } y = z^{-1} \,.\, \delta^2 \text{ und } z = y^{-1} \,.\, \delta^2$$

ist, so wird

$$y^n = y^{\frac{n}{2}} \,.\, z^{-\frac{n}{2}} \,.\, \delta^n = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{n}{2}} \,.\, \delta^n \text{ und } z^n = z^{\frac{n}{2}} \,.\, y^{-\frac{n}{2}} \,.\, \delta^n = \left(\frac{y}{z}\right)^{-\frac{n}{2}} \,.\, \delta^n$$

und also

$$2\varphi n = \left[\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{y}{z}\right)^{-\frac{n}{2}}\right] \,.\, \delta^n \text{ und } 2 \,.\, i \,.\, \psi n = \left[\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{y}{z}\right)^{-\frac{n}{2}}\right] \,.\, \delta^n$$

oder

$$179) \qquad \frac{2 \,.\, \varphi n}{\delta^n} = \left(\frac{\varphi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{\varphi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

und

$$180) \qquad \frac{2 \,.\, i \,.\, \psi n}{\delta^n} = \left(\frac{\varphi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right)^{\frac{n}{2}} - \left(\frac{\psi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

oder

$$181) \qquad \frac{2 \,.\, \varphi n}{\delta^n} = e^{\frac{n}{2} \,.\, \lg : \left(\frac{\varphi 1 + i \psi 1}{\varphi 1 - i \psi 1}\right)} + e^{-\frac{n}{2} \,.\, \lg : \left(\frac{\varphi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right)}$$

und

$$182) \qquad \frac{2 \,.\, i \,.\, \psi n}{\delta^n} = e^{\frac{n}{2} \,.\, \lg : \left(\frac{\varphi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right)} - e^{-\frac{n}{2}} \,.\, \lg : \left(\frac{\varphi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right)$$

In diesen beiden Gleichungen kommt ausser der Grösse δ, welche schon früher in die Untersuchung verflochten ist, auch noch eine zweite Hilfsgröfse $\lg \left(\frac{\varphi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right)$ vor; wir wollen für sie eben so, wie für die erste, ein besonderes Zeichen festsetzen, nämlich

$$183) \qquad \lambda 1 = \frac{1}{2 \,.\, i} \,.\, \lg : \left(\frac{\varphi 1 + i \,.\, \psi 1}{\varphi 1 - i \,.\, \psi 1}\right) = \frac{1}{2 \,.\, i} \,.\, \lg : \left(\frac{1 + i \,.\, \tau 1}{1 - i \,.\, \tau 1}\right)$$

$$= \frac{(\tau 1)^1}{1} + \frac{(\tau 1)^3 \,.\, i^2}{3} + \frac{(\tau 1)^5 \,.\, i^4}{5} + \frac{(\tau 1)^7 \,.\, i^6}{7} + \ldots\ldots$$

wo, damit auch hier wieder nur gerade Potenzen von i vorkommen, durch i gemessen ist. Die beiden Gleichungen 181 und 182 gewinnen hiedurch eine einfachere Gestalt, und geben folgende Entwickelung

184) $$\frac{\varphi n}{\delta^n} = \frac{e^{i.n.\lambda 1} + e^{-i.n.\lambda 1}}{2}$$

$$= 1 + \frac{(i.n.\lambda 1)^2}{1.2} + \frac{(i.n.\lambda 1)^4}{1.2.3.4} + \frac{(i\,n\,.\,\lambda 1)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots$$

und

185) $$\frac{i.\psi n}{\delta^n} = \frac{e^{i.n.\lambda 1} - e^{-i.n.\lambda 1}}{2}$$

$$= \frac{(i.n.\lambda 1)^1}{1} + \frac{(i.n.\lambda 1)^3}{1.2.3} + \frac{(i.n.\lambda 1)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{(i.n.\lambda 1)^7 \ldots}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots.$$

Wird nun noch δ^n in eine Reihe nach den Potenzen von n entwickelt, und die vorstehenden Reihen durch solche vervielfacht, so erhalten wir die vollständigen Entwickelungen von φn und ψn nach den Potenzen von n.

§. 68.

Die Hülfsgröfe $\lambda 1$ gehört nur den beiden ersten Gliedern $\varphi 1$ und $\psi 1$ der beiden Reihen A nnd B und nur dem ersten Gliede $\tau 1$ der dritten Reihe R an; jedes andere Glied hat seine besondere Hülfsgröfse, so dafs

186) $$\lambda n = \frac{1}{2.i} . \lg : \left(\frac{\varphi n - i.\psi n}{\varphi n + i.\psi n}\right) = \frac{1}{2.i} . \lg \left(\frac{1 + i.\tau n}{1 - i.\tau n}\right)$$

$$= \left(\frac{\psi n}{\varphi n}\right)^1 . \frac{i^0}{1} + \left(\frac{\psi n}{\varphi n}\right)^3 . \frac{i^2}{3} + \left(\frac{\psi n}{\varphi n}\right)^5 . \frac{i^4}{5} + \ldots.$$

$$= (\tau n)^1 . \frac{i^0}{1} + (\tau n)^3 . \frac{i^2}{3} + (\tau n)^5 . \frac{i^4}{5} + \ldots\ldots$$

Sie richtet sich zugleich nach den Zeichen von φn und ψn oder von τn; denn für ein verneintes n ist

$$\lambda(-n) = \frac{i^0}{1} \cdot (\tau - n)^1 + \frac{i^2}{3} \cdot (\tau - n)^3 + \frac{i^4}{5} \cdot (\tau - n)^5 + \ldots$$

$$= -\left[\frac{i^0}{1} (\tau n)^1 + \frac{i^2}{3} (\tau n)^3 + \frac{i^4}{5} (\tau n)^5 + \ldots\right]$$

also

187) $$\lambda(-n) = -\lambda(+n)$$

Sie verschwindet, wenn $n = o$ ist, oder in Zeichen

188) $$\lambda o = o$$

Wir können jedoch alle diese Hülfsgröfen $\lambda 2$, $\lambda 3$, $\lambda 4 \ldots . \lambda n$, für die verschiedenen Glieder der drei Reihen $\varphi 2$, $\varphi 3, \ldots$, $\psi 2$, $\psi 3, \ldots .$ und $\tau 2$, $\tau 3, \ldots .$ auf die Hülfsgröfse $\lambda 1$ eines einzigen Gliedes $\varphi 1$, $\psi 1$, $\tau 1$ zurückführen, denn da

$$2.i.\lambda n = \lg : \left(\frac{\varphi n + i \cdot \psi n}{\varphi n - i \cdot \psi n}\right) = \lg : \left(\frac{\varphi 1 + i \cdot \psi 1}{\varphi 1 - i \cdot \psi 1}\right)^n$$

$$= n . \lg : \left(\frac{\varphi 1 + i \cdot \psi 1}{\varphi 1 - i \cdot \psi 1}\right) = n \times 2 . i . \lambda 1$$

so ist

189) $$\lambda n = n . \lambda 1$$

Es ist also auch $\lambda(n . m) = n . m . \lambda 1$, und wenn λm statt $m . \lambda 1$ gesetzt wird, auch

190) $$\lambda(n \cdot m) = n . \lambda(m)$$

Die obigen Gleichungen 184 und 185 können also auf folgende Art dargestellt werden:

191) $$\frac{\varphi n}{\delta^n} = \frac{e^{i . \lambda n} + e^{i . \lambda n}}{2}$$

$$= 1 + \frac{(i . \lambda n)^2}{1 . 2} + \frac{(i . \lambda n)^4}{1.2.3.4} + \frac{(i . \lambda n)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots .$$

und

192) $$\frac{i . \psi n}{\delta^n} = \frac{e^{i . \lambda n} - e^{i . \lambda n}}{2}$$

$$= \frac{(i . \lambda n)^1}{1} + \frac{(i . \lambda n)^3}{1.2.3} + \frac{(i . \lambda n)^5}{1.2.3.4.5} + \ldots .$$

Beide erzeugen folgende

193) $$i \cdot \tau n = \frac{e^{i \cdot \lambda n} - e^{-i.\lambda n}}{e^{i \cdot \lambda n} + e^{-i.\lambda n}}$$

§. 69.

Die Hülfsgrösse λ verdient alle unsere Aufmerksamkeit, ihre Eigenschaften sind in 187, 188, 189, 190 niedergelegt, und in 186 ist sie nach den Potenzen von $\frac{\psi n}{\varphi n}$ oder τn entwickelt; nach diesem kann sie entweder aus zweien Gliedern der beiden ersten Reihen A und B oder aus einem Gliede der dritten Reihe R hergeleitet werden; es ist noch übrig zu zeigen, wie sie aus einem Gliede einer der beiden ersten Reihen A und B gefunden werden kann. Wir führen deshalb statt φn den Werth desselben aus 155

$$\varphi n = [\delta^{2n} + i^2 \cdot (\psi n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

in 186 ein, und entwickeln nun die Binomien, welche die Reihe

$$\lambda n = (\psi n)^1 . [\delta^{2n} + i^2 . (\psi n)^2]^{-\frac{1}{2}} . \frac{i^0}{1} + (\psi n)^3 . [\delta^{n} + i^2 . (\psi n)^2]^{-\frac{3}{2}} . \frac{i^2}{3} +$$

$$+ (\psi n)^5 . [\delta^{2n} + i^2 . (\psi n)^2]^{-\frac{5}{2}} . \frac{i^4}{5} + \ldots\ldots$$

darbietet. Die Reihe, welche hierdurch entsteht, ist

$$\lambda n = \frac{k(-\frac{1}{2},1)}{1} . (\psi n)^1 . \delta^{-n} + \begin{vmatrix} \frac{k(-\frac{1}{2},2)}{1} & (\psi n)^3 . \delta^{-3n} . i^2 + \frac{k(-\frac{1}{2},3)}{1} \\ \frac{k(-\frac{3}{2},1)}{3} & \end{vmatrix} (\psi n)^5 . \delta^{-5n} . i^4 + \ldots$$

$$\begin{vmatrix} \frac{k(-\frac{3}{2},2)}{3} \\ \frac{k(-\frac{5}{2},1)}{5} \end{vmatrix}$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe

$$\frac{k(-\frac{2p+1}{2},1)}{2p+1}+\frac{k(-\frac{2p-1}{2},2)}{2p-1}+\frac{k(-\frac{2p-3}{2},3)}{2p-3}+\ldots\ldots+\frac{k(-\frac{1}{2},p+1)}{1}$$

nimmt, wenn wir

$$\frac{k(-\frac{2p-2q+1}{2},q+1)}{2p-2q+1}=(-)^q\cdot\frac{k(\frac{2q+1}{2},q+1)}{2p+1}$$

setzen, folgende Gestalt an

$$\frac{k(\frac{2p+1}{2},1)-k(\frac{2p+1}{2},2)+k(\frac{2p+1}{2},3)-\ldots(-)^p.k(\frac{2p+1}{2},p+1)}{2p+1}$$

und geht durch allmäliges Zu- und Abzählen in folgendes über

$$\frac{(-)^p\cdot k(\frac{2p-1}{2},p+1)}{2p+1}=(-)^p\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots.(2p-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots.2p.(2p+1)}$$

Die obige Reihe ist folglich

$$194)\quad \lambda n=\psi\left\{\frac{\psi n}{\delta^n}\right\}^1-\frac{1}{2\cdot3}\cdot\left\{\frac{\psi n}{\delta^n}\right\}^3\cdot i^2+\frac{1\cdot3}{2.4.5}\cdot\left\{\frac{\psi n}{\delta^n}\right\}^5\cdot i^4-\ldots$$
$$\ldots(-)^p\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2p-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2p\cdot(2p+1)}\cdot\left\{\frac{\psi n}{\delta^n}\right\}^{2p+1}\cdot i^{2p}+\ldots$$

Die Potenzen dieser Hülfsgrösse λn, entwickelt nach den Potenzen von τn, kommen schon in §. 59 vor.

Früher haben wir Potenzen der Glieder der Reihen A und B durch einfache Glieder dieser Reihen dargestellt (168, 169, 170), wir wollen jetzt dieselben nach den Potenzen der Hülfsgrösse λ entwickeln; daher:

Entwicklung des Polynomiums

$$\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n = \left\{\frac{e^{i.\lambda p}+e^{-i.\lambda p}}{2}\right\}^n = \left\{1+\frac{(i.\lambda p)^2}{1.2}+\frac{(i.\lambda p)^4}{1.2.3.4}+\frac{(i.\lambda p)^6}{1.2.3.4.5.6}+..\right\}^n$$

$$= \left\{\frac{\varphi p}{\delta^2}\right\}^n v1+\left\{\frac{\varphi p}{\delta^2}\right\}^n v2.(i.\lambda p)^2+\left\{\frac{\varphi p}{\delta^2}\right\}^n v3.(i.\lambda p)^4+\left\{\frac{\varphi p}{\delta^2}\right\}^n v4.(i.\lambda p)^6+ \ldots$$

§. 70.

Zur Entwicklung dieser Reihe stehen uns zwei Wege offen, entweder durch Entwicklung des Binomiums

$$\left\{\frac{e^{i.\lambda p}+e^{-i.\lambda p}}{2}\right\}^n$$

oder des Polynomiums

$$\left\{1+\frac{(i.\lambda p)^2}{1.2}+\frac{(i.\lambda p)^4}{1.2.3.4}+..\right\}^n$$

Wir wollen beide versuchen, und zuvor den zuerst bezeichneten einschlagen. Wir finden, dafs für jedes n

$$\left\{\frac{\varphi p}{\delta^{n_1}}\right\}^n = \frac{e^{ni\lambda p}+k(n,2).e^{(n-2)i\lambda p}+k'n,3).e^{(n-4)i\lambda p}+..+k(n,n+1).e^{-ni\lambda p}}{2^n}$$

Aus dieser Gleichung entsteht durch Einführung der Reihen für die verschiedenen Potenzen von e eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{n^s+k(n,2).(n-2)^s+k(n,3).(n-4)^s+k(n,4).(n-6)^s+\ldots}{1.2.3.....s.2^n}.(i.\lambda p)^s$$

ist. Es ist folglich, da keine ungerade Potenzen von $(i.\lambda p)$ vorkommen können

$$195)\ \left\{\frac{\varphi p}{\delta^2}\right\}^n v(m+1)=\frac{n^{2m}+k(n,2).(n-2)^{2m}+k(n,3).(n-4)^{2m}+k(n,4).(n-6)^{2m}+..}{1.2.3...(2m-1).2m.2^n}$$

Da diese Entwicklung nur die geraden Potenzen von $(i.\lambda p)$ aufnimmt, so müssen die Vorzahlen der ungeraden Potenzen verschwinden, und

196) $n^{2m+1}+k(n,2).(n-2)^{2m+1}+k(n,3).(n-4)^{2m+1}+k(n,4).(n-6)^{2m+1}+\ldots=0$

seyn.

Ist n eine bejahete Zahl, so sind die vorstehenden Reihen endlich, für jeden anderen Werth von n sind sie unendlich; so ist

197) $$\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^{-1} v(m+1)=\frac{1^{2m}-3^{2m}+5^{2m}-7^{2m}+\ldots-\ldots}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2m-1)\,.\,2m\,.\,2^{-1}}$$

und

198) $$1^{2m+1}-3^{2m+1}+5^{2m+1}-7^{2m+1}+9^{2m+1}-\ldots+\ldots=0$$

§. 71.

Der zweite oben bezeichnete Weg führt nach 36 zu der ersten zurücklaufenden Bildungsweise

199) $$\alpha.\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n v(m+1)+\frac{\alpha+\beta}{1\,.\,2}.\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n vm+\frac{\alpha+2\beta}{1.2.3.4}.\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n v(m-1)$$
$$+\ldots+\frac{\alpha+m\beta}{1\,.\,2\ldots2m}.\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n v1=(\alpha+\frac{m\beta}{n+1}).\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^{n+1} v(m+1)$$

und nach 38 zu der zweiten

200) $$\{m-o(n+1)\}.\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n v(m+1)+\frac{m-1(n+1)}{1\,.\,2}.\left\{\frac{\varphi q}{\delta^p}\right\}^n vm$$
$$+\frac{m-2(n+1)}{1.2.3.4}.\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n v(m-1)+\ldots+\frac{m-m(n+1)}{1\,.\,2\ldots2m}.\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n v1=0$$

Er führt auch, indem wir 31 und 195 verbinden, zu der unabhängigen Bildungsweise; die Gleichung, welche hierdurch entsteht, ist

201) $$1\,.\,2\,.\,3\ldots(2m-1)\,.\,2m\,.\,2^{m-1}.\left\{\frac{\varphi p}{\delta^p}\right\}^n v(m+1)=$$
$$=(-)^{m-1}\begin{cases} k(n,2).k(n-2,m)\,.\,2^{m-1}.1^{2m} \\ -k(n,3).k(n-3,m-1).2^{m-2}.2^{2m} \\ +k(n,4).k(n-4,m-2).2^{m-3}.[3^{2m}+k(3,2).1^{2m}] \\ -k(n,5).k(n-5,m-3).2^{m-4}.[4^{2m}+k(4,2).2^{2m}] \end{cases}$$

$$+\ k(n,6).k(n-6,m-4).2^{m-5}.[5^{2m}+k(5,2).3^{2m}+k(5,3).1^{2m}]$$
$$-\ k(n,7).k(n-7,m-5).2^{m-6}.[6^{2m}+k(6,2).4^{2m}+k(6,3).2^{2m}]$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$(-)^{m-1}k(n,m+1).k(n-m-1,1).2^{0}.[m^{2m}+k(m,2).(m-2)^{2m}+k(m,3).(m-4)^{2m}+\ldots]$$

sie gilt für jedes n und ist von dem Nachtheile befreit, welcher sich in 195 bei einem verneinten oder gebrochenen n zeigte.

§. 72.

Ein dritter Weg zur Entwicklung unseres Polynomiums zeigt sich im Zurückführen dieses auf ein schon früher gebildetes Polynomium. Indem wir nämlich $e^{i.\lambda p}+e^{-i.\lambda p}$ in die beiden Factoren

$$e^{-i.\lambda p}.(e^{2i.\lambda p}+1)$$

zerlegen, erhalten wir die Gleichung

$$\left\{\frac{\varphi p}{\partial^2}\right\}^n = \frac{e^{-ni.\lambda p}}{2^n}.(e^{2i.\lambda p}+1)^n$$

$$= 2^{-n}.\left[1-\frac{n}{1}.(i.\lambda p)^1+\frac{n^2}{1.2}.(i.\lambda p)^2-\frac{n^3}{1.2.3}.(i.\lambda p)^3+\frac{n^4}{1.2.3.4}.(i.\lambda p)^4-\ldots\right]$$

$$\times\ [D^n v1 + 2^1 . D^n v2 . (i\lambda p)^1 + 2^2.D^n v3.(i\lambda p)^2 + 2^3.D^n v4.(i\lambda p)^3 + \ldots]$$

und aus dieser, da die ungeraden Potenzen von $(i.\lambda p)$ nicht vorkommen dürfen, folgende Gleichung

202) $$\left\{\frac{\varphi p}{\partial^2}\right\}^n v(m+1) = 2^{2m-n}.D^n v(2m+1) - \frac{2^{2m-n-1}.n^1.D^n v(2m)}{1}$$
$$+\frac{2^{2m-n-2}.n^2.D^n v(2m-1)}{1.2}-\frac{2^{2m-n-3}.n^3.D^n v(2m-2)}{1.2.3}+\ldots-\ldots.$$
$$\ldots+\frac{2^{-n}.n^{2m}.D^n v1}{1.2.3\ldots 2m}$$

und

203) $$2^{2m+1}.D^n v(2m+2) - \frac{2^{2m} n^1 . D^n v(2m+1)}{1} + \frac{2^{2m-1} . n^2 D^n v(2m)}{1 . 2}$$
$$- \frac{2^{2m-2} . n^3 . D^n v(2m-1)}{1 . 2 . 3} + \ldots . - \frac{2^0 n^{2m+1} . D^n v 1}{1.2.3 \ldots (2m+1)} = 0$$

wo D den schon §. 40 festgesetzten Werth behält, nämlich

$$D = 2 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots .$$

§. 73.

In dem besondern Falle, wenn $n = -1$ ist, erhalten die Gleichungen 201, 202, 203, eine einfachere Form, nämlich

204) $$1 . 2 . 3 \ldots (2m-1) . 2m . 2^{m-1} . \left\{\frac{\varphi p}{\delta p}\right\}^{-1} v(m+1) =$$
$$= - k(m+1,3) . 2^{m-1} . 1^{2m}$$
$$+ k(m+1,4) . 2^{m-2} . 2^{2n}$$
$$- k(m+1,5) . 2^{m-3} . [3^{2m} + k(3,2) . 1^{2m}]$$
$$+ k(m+1,6) . 2^{m-4} . [4^{2m} + k(4,2) . 2^{2m}]$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$(-)^m k(m+1,m+2) . 2^0 . [m^{2m} + k(m,2) . (m-2)^{2m} + k(m,3) . (m-4)^{2m} + \ldots]$$

und

205) $$\left\{\frac{\varphi p}{\delta p}\right\}^{-1} v(m+1) = 2^{2m+1} . D^{-1} v(2m+1) + \frac{2^{2m} . D^{-1} v(2m)}{1}$$
$$+ \frac{2^{2m-1} . D^{-1} v(2m-1)}{1 . 2} + \ldots + \frac{2^1 . D^{-1} v 1}{1.2.3 \ldots 2m}$$

nnd

206) $$2^{2m+1} . D^{-1} v(2m+2) + \frac{2^{2m} . D^{-1} v(2m+1)}{1} + \frac{2^{2m-1} . D^{-1} v(2m)}{1 . 2}$$
$$+ \ldots + \frac{2^0 . D^{-1} v 1}{1.2 \ldots (2m+1)} = 0$$

Wir können dieses Polynomium noch auf ein anderes, welches wir früher

§. 51 untersucht haben, zurückführen; verbinden wir nämlich 205 mit 113, so entsteht die Gleichung

$$207)\quad \left\{\frac{\varphi p}{\delta^2}\right\}^{-1} v(m+1) = \frac{2^{2m}(1-2^{2m}).E^{-1}v(2m+1)}{1} + \frac{2^{2m-2}(1-2^{2m-2}).E^{-1}v(2m-1)}{1.2.3} + \frac{2^{2m-4}(1-2^{2m-4}).E^{-1}v(2m-3)}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2^2(1-2^2).E^{-1}v3}{1.2.3\ldots(2m-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots 2m}$$

wo, wie früher, Seite 109

$$E = \frac{1}{1} + \frac{x^1}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4}$$

§. 74.

An die Entwicklung des Polynomiums schliefst sich unmittelbar die Entwicklung des Logarithmen der Grundreihe an. Die Gleichung 64 führt, wenn wir zugleich von der Gleichung 195 Anwendung machen, zu folgender Gleichung

$$208)\quad \lg\left(\frac{\varphi p}{\delta^2}\right) = \left(\lg\frac{\varphi p}{\delta^2}\right)v1\,.\,(i\lambda p)^2 + \left(\lg\frac{\varphi p}{\delta^2}\right)v2.(i\lambda p)^4 + \left(\lg\frac{\varphi p}{\delta^2}\right)v3.(i\lambda p)^6 + \left(\lg\frac{\varphi p}{\delta^2}\right)v4.(i\lambda p)^8 + \ldots$$

und

$$209)\quad \left(\lg\frac{\varphi p}{\delta^2}\right)vm = \frac{k(m,2).1^{2m}}{1.1.2.2^2} - \frac{k(m,3).2^{2m}}{2.1.2.3.4.2^1} + \frac{k(m,4).[3^{2m}+k(3,2).1^{2m}]}{3.1.2.3.4.5.6.2^2} - \frac{k(m,5).[4^{2m}+k(4,2).2^{2m}]}{4.1.2.3.4.5.6.7.8.2^3}$$

. . . . . .

$$(-)^{m-1}.\frac{k(m,m+1)\,.\,[m^{2m}+k(m,2)\,.\,(m-2)^{2m}+k(m,3)\,.\,(m-4)^{2m}+\ldots]}{m\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,.\,2m\,.\,2^{m-1}}$$

Eine zweite Bildungsweise erhalten wir aus 65; indem wir hierbei zugleich 195 zum Grunde legen, diese Gleichung durch n messen und dann $n=0$ setzen, erhalten wir die Gleichung

$$210)\quad \frac{\left(\frac{\varphi p}{\partial p}\right)^n v(m+1)}{n=0} = (\lg\frac{\varphi p}{\partial p})vm = \frac{2^{2m}1^{2m-1}-2^{2m-1}+3^{2m-1}-4^{2m-1}+\ldots)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,2m}$$

Wir bemerken, dafs die eingeklammerte Reihe schon früher 117 bei dem Polynomium E^{-1} vorgekommen ist; indem wir von jener Gleichung Gebrauch machen, erhalten wir folgende

$$211)\quad (\lg\frac{\varphi p}{\partial p})vm = \frac{2^{2m}\,.\,(2^{2m}-1)\,.\,E^{-1}v(2m+1)}{2m}$$

welche die Bildung der Reihe für den Logarithmen auf die Bildung des schon früher gebildeten Polynomiums

$$E^{-1} = (\frac{1}{1}+\frac{x^1}{1\,.\,2}+\frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\,.\,.)^{-1}$$

zurückführt, so dafs

$$212)\quad \lg\left(\frac{\varphi p}{\partial p}\right) = \frac{2^2(2^2-1).E^{-1}v3}{2}.(i\lambda p)^2+\frac{2^4(2^4-1).E^{-1}v5}{4}.(i\lambda p)^4$$
$$+\frac{2^6(2^6-1).E^{-1}v7}{6}.(i\lambda p)^6+\ldots\ldots$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir, wenn wir den Logarithmen von $\frac{\varphi p}{\partial p}$ auf jenen von $1+e^x$ oder von e^x-1 zurückführen, und hierbei die Gleichungen

$$\frac{\varphi p}{\partial p} = \frac{e^{2i\lambda p}+1}{2\,.\,e^{i\lambda p}}$$

und

$$\frac{\varphi p}{\partial p} = \frac{1}{2\,.\,e^{i\lambda p}}\cdot\frac{e^{4i\lambda p}-1}{e^{2i\lambda p}-1}$$

also

$$\lg \frac{\varphi p}{\delta^2} = -i\lambda p - \lg 2 + \lg(e^{2i\lambda p} + 1)$$

und

$$\lg \frac{\varphi p}{\delta^2} = -i\lambda p - \lg 2 - \lg(e^{2i\lambda p} - 1) + \lg(e^{4i\lambda p} - 1)$$

zum Grunde legen.

Entwicklung des Polynomiums

$$\left(\frac{i\psi p}{\delta^p}\right)^n = \left(\frac{e^{i\lambda p} - e^{-i\lambda p}}{2}\right)^n = \left(\frac{(i\lambda p)^1}{1} + \frac{(i\lambda p)^3}{1.2.3} + \frac{(i\lambda p)^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)^n$$

$$= \left(\frac{i\psi p}{\delta^p}\right)^n v1.(i\lambda p)^n + \left(\frac{i\psi p}{\delta^p}\right)^n v2.(i\lambda p)^{n+2} + \left(\frac{i\psi p}{\delta^p}\right)^n v3 \,.\, (i\lambda p)^{n+4} + \ldots$$

§. 75.

Wir können diese Aufgabe, so wie die vorige, auf zwei verschiedene Arten lösen; wir entwickeln entweder das Binomium und führen in solches die verschiedenen Potenzen von e ein, oder wir entwickeln das Polynomium nach den früher gefundenen allgemeinen Gesetzen.

Auf dem ersten Wege erhalten wir die Reihe

$$\left(\frac{i\psi p}{\delta^p}\right)^n = 2^{-n} \,.\, [e^{ni\lambda p} - k(n,2) \,.\, e^{(n-2)i\lambda p} + k(n,3) \,.\, e^{(n-4)i\lambda p} - \ldots]$$

deren allgemeines Glied, wenn sie nach den Potenzen von $(i\lambda p)$ geordnet wird,

$$\frac{n^q - k(n,2).(n-2)^q + k(n,3).(n-4)^q - k(n,4).(n-6)^q + \ldots - \ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots q \,.\, 2^n} \,.\, (i\lambda p)^q$$

ist. Da bei einem ganzen bejaheten n keine niedere Potenzen von $(i\lambda p)$ vorkommen können, als $(i\lambda p)^n$, so verschwinden alle Vorzahlen von $(i\lambda p)^q$, wo q kleiner als n ist. Es ist folglich

213)
$$\left(\frac{i\psi p}{\delta^p}\right)^n v(m+1) =$$

$$= \frac{n^{n+2m} - k(n,2).(n-2)^{n+2m} + k(n,3).(n-4)^{n+2m} - k(n,4).(n-6)^{n+2m} + \ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots (n+2m) \,.\, 2^n}$$

§. 76.

Auf dem zweiten vorgezeichneten Wege erhalten wir aus 31, wenn

wir hierbei zugleich 213 benutzen, folgende allgemeine unabhängige Bildungsweise

$$214)\quad \left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n v(m+1) = (-)^{m-1}\left\{\frac{k(n,2).k(n-2,m).1^{2m+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2m+1).2^0}\right.$$

$$-\frac{k(n,3).k(n-3,m-1).2^{2m+2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(2m+2).2^1}$$

$$+\frac{k(n,4).k(n-4,m-2).[3^{2m+3}-k(3,2).1^{2m+3}]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(2m+3)\,.\,2^2}$$

$$-\frac{k(n,5).k(n-5,m-3).[4^{2m+4}-k(4,2).2^{2m+4}]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(2m+4)\,.\,2^3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.(-)^{m-1}.\frac{k(n,m+1).k(n-m-1,1).[m^{3m}-k(m,2).(m-2)^{3m}+k(m,3).(m-4)^{3m}-\ldots]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(3m)\,.\,2^{m-1}}\right\}$$

und die zurücklaufende Bildungsweise aus 36 und 38, nämlich

$$215)\quad \frac{\alpha}{1}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n v(m+1)+\frac{\alpha+\beta}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n vm+\frac{\alpha+2\beta}{1.2.3.4.5}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n v(m-1)$$

$$+\ldots+\frac{\alpha+m\beta}{1.2\ldots(2m+1)}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n v_1=\frac{\alpha(n+1)+\beta m}{n+1}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^{n+1} v(m+1)$$

und

$$216)\quad \frac{m-o(n+1)}{1}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n v(m+1)+\frac{m-1(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n vm+$$

$$+\frac{m-2(n+1)}{1.2.3.4.5}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n v(m-1)+\ldots+\frac{m-m(n+1)}{1.2\ldots(2m+1)}\cdot\left(\frac{i\psi p}{\delta p}\right)^n v_1=0$$

§. 77.

Das Zerlegen in Factoren gewährt auch hier wieder den Vortheil, die Bildung unseres Polynomiums auf ein anderes schon früher gebildetes zurückzuführen. Es ist

$$\left(\frac{i\psi p}{\delta^2}\right)^n = 2^{-n} \cdot e^{-ni\lambda p} \cdot (e^{2i\lambda p} - 1)^n$$

$$= [1 - \frac{n}{1} \cdot (i\lambda p)^1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \cdot (i\lambda p)^2 - \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (i\lambda p)^3 + \ldots]$$

$$\times [E^n v1 \cdot (i\lambda p)^n + 2^1 \cdot E^n v2 \cdot (i\lambda p)^{n+1} + 2^2 \cdot E^n v3 \cdot (i\lambda p)^{n+2} + 2^3 \cdot E^n v4 \cdot (i\lambda p)^{n+3} + \ldots]$$

Wird das Vervielfachen, welches hier durch Zeichen angekündigt ist, wirklich vorgenommen, so erhalten wir zur Bildung unseres Polynomiums folgende Gleichung

217) $$\left(\frac{i\psi p}{\delta^2}\right)^n v(m+1) = 2^{2m} \cdot E^n v(2m+1) - \frac{n^1 \cdot 2^{2m-1} \cdot E^n v2m}{1} + \frac{n^2 \cdot 2^{2m-2} \cdot E^n v(2m-1)}{1 \cdot 2}$$

$$\ldots + \frac{n^{2m} \cdot 2^0 \cdot E^n v1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2m)}$$

Die übrigen Glieder müssen verschwinden und sind sämmtlich begriffen in

218) $$2^{2m+1} \cdot E^n v(2m+2) - \frac{n^1 \cdot 2^{2m} \cdot E^n v(2m+1)}{1} + \frac{n^2 \cdot 2^{2m-1} \cdot E^n v2m}{1 \cdot 2}$$

$$- \ldots - \frac{n^{2m+1} \cdot 2^0 \cdot E^n v1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2m+1)} = 0$$

§. 78.

Der merkwürdigste Fall ist $n = -1$; für ihn erhalten wir folgende Gleichungen aus 214

219) $$\left(\frac{i\psi p}{\delta^2}\right)^{-1} v(m+1) = -\frac{k(m+1,3) \cdot 1^{2m+1}}{1.2 \ldots (2m+1).2^0}$$

$$+ \frac{k(m+1,4) \cdot 2^{2m+2}}{1.2 \ldots (2m+2) \cdot 2^1}$$

$$- \frac{k(m+1,5).[3^{2m+3} - k(3,2) \cdot 1^{2m+3}]}{1 \cdot 2 \ldots (2m+3) \cdot 2^2}$$

$$+ \frac{k(m+1,6).[4^{2m+4} - k(4,2) \cdot 2^{2m+4}]}{1 \cdot 2 \ldots (2m+4) \cdot 2^3}$$

. . . . . .

$$(-)^m \cdot \frac{k(m+1,m+2).[m^{3m} - k(m,2).(m-2)^{3m} + k(m,3).(m-4)^{3m} - \ldots]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (3m) \cdot 2^{m-1}}$$

aus 216

$$220) \quad \frac{1}{1} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\delta^p}\right\}^{-1} v(m+1) + \frac{1}{1.2.3} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\delta^p}\right\}^{-1} vm + \frac{1}{1.2.3.4.5} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\delta^p}\right\}^{-1} v(m-1)$$
$$+ \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (2m+1)} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\delta^p}\right\}^{-1} v1 = 0$$

und aus 217

$$221) \quad \left\{\frac{i\psi p}{\delta^p}\right\}^{-1} v(m+1) = 2^{2m} \cdot E^{-1} v(2m+1) + \frac{2^{2m-2} \cdot E^{-1} v(2m-1)}{1 \cdot 2}$$
$$+ \frac{2^{2m-4} \cdot E^{-1} v(2m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{2^2 \cdot E^{-1} v3}{1.2\ldots(m-2)} + \frac{2^1 \cdot E^{-1} v2}{1.2\ldots(2m-1)} + \frac{2^0 \cdot E^{-1} v1}{1 \cdot 2 \ldots 2m}$$

Die Bildung dieses besondern Polynomiums können wir sehr leicht, wenn wir das Eigenthümliche des Falles berücksichtigen, auf eine einfachere Art auf das früher gebildete Polynomium E^{-1} zurückführen. Es ist

$$\left\{\frac{i\psi p}{\delta^p}\right\}^{-1} = \frac{2}{e^{i\lambda p} - e^{-i\lambda p}} = \frac{2 \cdot e^{i\lambda p}}{e^{2i\lambda p} - 1} = \frac{-2 + 2(e^{i\lambda p} + 1)}{e^{2i\lambda p} - 1}$$
$$= -\frac{2}{e^{2i\lambda p} - 1} + \frac{2}{e^{i\lambda p} - 1}$$

also auch

$$222) \quad \left\{\frac{i\psi p}{\delta^p}\right\}^{-1} v(m+1) = (2^1 - 2^{2m}) \cdot E^{-1} v(2m+1)$$

welche Gleichung viel einfacher als 221 ist.

§. 79.

Der Logarithme von $\frac{\psi p}{\delta^p} \cdot \frac{1}{\lambda p}$ ist

223) $$\lg\left\{\frac{\psi p}{\delta^p \cdot \lambda p}\right\} = (\lg \frac{\psi p}{\delta^p \cdot \lambda p})v1.(i\lambda p)^2 + (\lg \frac{\psi p}{\delta^p \cdot \lambda p})v2.(i\lambda p)^4 + (\lg \frac{\psi p}{\delta^p \cdot \lambda p})v3 \cdot (i\lambda p)^6 + \ldots.$$

und nach 64 in Verbindung mit 213

224) $$(\lg \frac{\psi p}{\delta^p \lambda p})vm = \frac{k(m,2) \cdot 1^{2m+1}}{1.1.2.3\ldots(m+1).2^0} - \frac{k(m,3) \cdot 2^{2m+2}}{2.1.2.3\ldots(2m+2).2^1} + \frac{k(m,4).[3^{2m+3} - k(3,2).1^{2m+3}]}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3\ldots(2m+3) \cdot 2^2} + \frac{k(m,5).[4^{2m+4} - k(4,2).2^{2m+4}]}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2m+4) \cdot 2^3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^{m-1}.\frac{k(m,m+1).[m^{3m} - k(m,2).(m-2)^{3m} + k(m,3).(m-4)^{3m} - \ldots\ldots]}{m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (3m) \cdot 2^{m-1}}$$

Wenn wir das Eigenthümliche des gegebenen Falles berücksichtigen, so können wir die Entwicklung dieses Logarithmen auf die Entwicklung eines früheren Polynomiums zurückführen. Es ist

$$\lg\left\{\frac{\psi p}{\delta^p \lambda p}\right\} = \lg\left\{\frac{e^{i\lambda p} - e^{-i\lambda p}}{2i\lambda p}\right\} = \lg\left\{\frac{e^{2i\lambda p}}{2i\lambda p \cdot e^{i\lambda p}}\right\}$$

$$= \lg\left\{\frac{e^{2i\lambda p} - 1}{2i\lambda p}\right\} - i\lambda p$$

folglich nach 124

225) $$\lg\left\{\frac{\psi p}{\delta^p \lambda p}\right\} = \frac{2^1.E^{-1}v3}{1} \cdot (i\lambda p)^2 + \frac{2^3.E^{-1}v5}{2} \cdot (i\lambda p)^4 + \frac{2^5.E^{-1}v7}{3} \cdot (i\lambda p)^6 + \frac{2^7.E^{-1}v9}{4} \cdot (i\lambda p)^8 + \ldots.$$

und

226) $$(\lg\left\{\frac{\psi p}{\delta^p \lambda p}\right\}vm = \frac{2^{2m-1} \cdot E^{-1}v(2m+1)}{m}$$

Entwicklung des Polynomiums.

$$(i\lambda p)^n = (i\lambda p)^n v1 . \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^n + (i\lambda p)^n v2 . \left\{\frac{i\psi p}{\delta^2}\right\}^{n+2} + (i\lambda p)^n v3 . \left\{\frac{i\psi p}{\delta^2}\right\}^{n+4} + \ldots\ldots$$

§. 80.

Die Reihe, welche hier zur nten Potenz erhoben werden soll, ist

$$i\lambda p = \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^1 - \frac{1}{2.3} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^3 + \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^7 + \ldots$$

Die allgemeinen Gesetze zur Bildung des Polynomiums erhalten durch die Eigenthümlichkeiten der vorgegebenen Reihe keine grössere Einfachheit. Da aber diese Reihe die umgekehrte von

$$\left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^q = \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^q v1 . (i\lambda p)^q + \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^q v2 . (i\lambda p)^{q+2} + \ldots.$$

ist, so mufs auch zwischen ihnen die Gleichung 5o statt finden und also

227) $$(n+2m) . (i\lambda p)^n v(m+1) = n . \left\{\frac{i\psi p}{\delta^2}\right\}^{-n-2m} v(m+1)$$

seyn. Durch diese Gleichung ist das vorgegebene Polynomium auf das vorige zurückgebracht.

Ist $n = -2m-1$, so ist

228) $$(i\lambda p)^{-2m-1} v(m+1) = (2m+1) . \left\{\frac{i\psi p}{\delta^2}\right\}^1 v(m+1) = \frac{1}{1.2.3.4.5....2m}$$

Ist $n = -2m+1$, so ist

229) $$(i\lambda p)^{-2m+1} v(m+1) = -(2m-1) . \left\{\frac{i\psi p}{\delta^2}\right\}^{-1} v(m+1) =$$

$$= (2m-1).(2^{2m}-2^1) . E^{-1} v(2m+1)$$

Ist $n = 1$, so ist

230) $$\left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^{-2m-1} v(m+1) = (-)^m . \frac{1.3.5....(2m-1)}{2.4.6....(2m)}$$

Den Logarithmen von

$$i\lambda p : \frac{i\psi p}{\partial^2} = \lambda p : \frac{\psi p}{\partial^2}$$

finden wir aus 227, wenn wir durch n messen, und dann $n = o$ setzen, nämlich

231) $$\frac{(i\lambda p)^n v(m+1)}{n = o} = \frac{1}{2m} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial^2}\right\}^{-2} v(m+1)$$

Es ist also

232) $$\lg(\lambda p) - \lg\left\{\frac{\psi p}{\partial^2}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial p}\right\}^{-2} v2 \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial p}\right\}^{2} + \frac{1}{4} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial^2}\right\}^{-4}_{m} v3 \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial p}\right\}^{4}$$
$$+ \frac{1}{6} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial^2}\right\}^{-6} v4 \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial^2}\right\}^{6} + \ldots .$$

Entwicklung des Polynomiums

$$(i\tau p)^n = \left\{\frac{e^{i\lambda p} - e^{-i\lambda p}}{e^{i\lambda p} + e^{-i\lambda p}}\right\}^n = (i\tau p)^n v1 \,.\, (i\lambda p)^n + (i\tau p)^n v2 \,.\, (i\lambda p)^{n+2}$$
$$+ (i\tau p)^n v3 \,.\, (i\lambda p)^{n+4} + \ldots.$$

§. 81.

Bei der Entwicklung dieses Polynomiums können wir keine Anwendung von den allgemeinen Gesetzen zur Bildung eines Polynomiums machen, denn es fehlt uns die Grundlage hierzu, nämlich die Grundreihe

$$i\tau p = (i\tau p)^1 v1 \,.\, (i\lambda p)^1 + (i\tau p)^1 v2 \,.\, (i\lambda p)^3 + (i\tau p) v3 \,.\, (i\lambda p)^5 + \ldots.$$

welche uns selbst noch unbekannt ist. Wir müssen vielmehr das Eigenthümliche des gegebenen Falles ganz in Anspruch nehmen.

Geben wir durch das Messen dem gegebenen Bruche eine einfachere Form

$$\frac{e^{i\lambda p} - e^{-i\lambda p}}{e^{i\lambda p} + e^{-i\lambda p}} = -\frac{e^{-2i\lambda p} - 1}{e^{-2i\lambda p} + 1} = -1 + \frac{2}{e^{-2i\lambda p} + 1}$$

so bringen wir hierdurch die Entwicklung von $i\tau p$ auf die frühere Entwicklung von $(e^x + 1)^{-1}$ zurück, und erhalten folgende Reihe

233) $$i\tau p = -2^2 D^{-1} v2 . (i\lambda p)^1 - 2^4 D^{-1} v4 . (i\lambda p)^3 - 2^6 . D^{-1} v6 . (i\lambda p)^5 - \ldots$$

und nach 113

234) $$i\tau p = 2^2(2^2 - 1) \,.\, E^{-1} v3 \,.\, (i\lambda p)^1 + 2^4(2^4 - 1) E^{-1} v5 \,.\, (i\lambda p)^5 + \\ + 2^6 \,.\, (2^6 - 1) E^{-1} v7 \,.\, (i\lambda p)^5 + \ldots.$$

Es ist also

235) $$(i\tau p)^1 vm = -2^{2m} D^{-1} v2m = 2^{2m}(2^{2m} - 1) \,.\, E^{-1} v(2m+1)$$

Denselben Weg schlagen wir bei $n = -1$ ein. Es ist

$$\left\{\frac{e^{i\lambda p} - e^{-i\lambda p}}{e^{i\lambda p} + e^{-i\lambda p}}\right\}^{-1} = \frac{e^{2i\lambda p} + 1}{e^{2i\lambda p} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2i\lambda p} - 1}$$

und folglich

236) $$(i\tau p)^{-1} = 2^{0}.E^{-1}v1.(i\lambda p)^{-1} + 2^{2}.E^{-1}v3(i\lambda p)^{1} + 2^{4}.E^{-1}v5.(i\lambda p)^{3} + + 2^{6}.E^{-1}v7.(i\lambda p)^{5} + \ldots .$$

und

237) $$(i\tau p)^{-1}v(m+1) = 2^{2m} \,.\, E^{-1}v(2m+1)$$

Die Reihen $(i\tau p)^{+1}$ und $(i\tau p)^{-1}$ sind hierdurch auf die Entwicklung eines früheren Polynomiums zurückgebracht. Werden die Gleichungen 235 und 237 mit einander verbunden, so entsteht eine Gleichung,

238) $$(i\tau p)^{+1}vm = (2^{2m}-1)(i\tau p)^{-1}v(m+1)$$

welche zeigt, wie die Glieder der verneinten Potenz -1 aus den Gliedern der bejaheten Potenz $+1$ hergeleitet werden können.

Wir können diese Reihen auf die frühere für

$$\left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^{-1}$$

zurückbringen, wenn wir die Gleichungen 235 und 237 mit 222 verbinden; wir erhalten hierdurch folgende:

239) $$(1-2^{2m-1}) \,.\, (i\tau p)^{+1}vm = 2^{2m-1} \,.\, (2^{2m}-1) \,.\, \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^{-1} v(m+1)$$

und

240) $$(1-2^{2m-1}) \,.\, (i\tau p)^{-1}v(m+1) = 2^{2m-1} \,.\, \left\{\frac{i\psi p}{\delta p}\right\}^{-1} v(m+1)$$

§. 82.

Wir haben bis hierhin uns nur noch mit der ersten Potenz von $i.\tau p$ beschäftiget; gehen wir weiter zu der nten Potenz, so müssen wir, um nicht die allgemeinen Gesetze des Polynomiums abzuschreiben, welche durch die Eigenthümlichkeiten des besondern Falles hier keine Vereinfachung erhalten, zu einem früher schon versuchten Mittel unsere Zuflucht nehmen. Von den beiden Reihen

$(i\tau p)^n = (i\tau p)^n v1 \cdot (i\lambda p)^n + (i\tau p)^n v2 \cdot (i\lambda p)^{n+2} + (i\tau p)^n v3 \cdot (i\lambda p)^{n+4} + ..$

und

$$(i\lambda p)^1 = \tfrac{1}{1} \cdot (i\tau p)^1 + \tfrac{1}{3} \cdot (i\tau p)^3 + \tfrac{1}{5} \cdot (i\tau p)^5 + \ldots .$$

ist die eine die umgekehrte der andern; es mufs also zwischen ihren Gliedern die Gleichung 50 statt finden; nämlich

241) $(n+2m) \cdot (i\tau p)^n v(m+1) = n \cdot O^{-(n+2m)} v(m+1)$

wo nach §. 59

$$O = \frac{1}{1} + \frac{x^1}{3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} + \ldots .$$

Da wir die Bildung unsers Polynomiums auf ein schon früher gebildetes O zurückgeführt haben, so können wir auch jetzt die zurücklaufende Bildungsweise, welche wir für das Polynomium O gefunden haben, auf das jetzt vorgelegte Polynomium übertragen. Wir erhalten hierdurch aus 139 und 241 die Gleichung

242) $(n+2m) \cdot (i\tau p)^n v(m+1) = n \cdot (i\tau p)^{n-1} v(m+1) - n \cdot (i\tau p)^{n+1} vm$

welche die zurücklaufende Bildungsweise unseres Polynomiums enthält, und für jedes n gilt. Wenn $n = o$ ist, so mufs 238 angewendet werden.

§. 83.

Dadurch, dafs wir $(\tau p)^n$ auf frühere Polynomien zurückgebracht haben, können wir auch jetzt die Glieder dieser Polynomien durch Gleichungen in Verbindung bringen. Wir finden durch Verbindung von 235 und 241

243) $(2m-1) \cdot 2^{2m} \cdot (2^{2m}-1) \cdot E^{-1} v(2m+1) = O^{-2m+1} vm$

von 237 und 241

244) $(1-2m) \cdot 2^{2m} \cdot E^{-1} v(2m+1) = O^{-2m+1} v(m+1)$

von 239 und 241

245) $(2m-1) \cdot 2^{2m-1} \cdot (2^{2m}-1) \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial p}\right\}^{1} v(m+1) =$

$$= (1-2^{2m-1}) \cdot O^{-2m+1} vm$$

von 240 und 241

246) $(2m-1) \cdot 2^{2m-1} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial p}\right\}^{-1} v(m+1) = (2^{2m-1}-1).O^{-2m+1} v(m+1)$

von 243 und 244

247) $(1-2^{2m})O^{-2m+1} v(m+1) = O^{-2m+1} vm$

von 139 und 247

248) $(2m-1)O^{-2m} v(m+1) = (2^{2m}-2)O^{-2m+1} v(m+1)$

§. 84.

Den Logarithmen von $\frac{\tau p}{\lambda p}$ erhalten wir nach 65 aus 242

249) $$\frac{(i\tau p)^n v(m+1)}{n=0} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m}-1} (i\tau p)^1 vm$$

$$= -\frac{2^{2m-1}-1}{m} \cdot (i\tau p)^{-1} v(m+1)$$

$$= -\frac{2^{2m}(2^{2m-1})}{m} \cdot E^{-1} v(2m+1)$$

$$= \frac{2^{2m-1}}{m} \cdot \left\{\frac{i\psi p}{\partial p}\right\}^{-1} v(m+1)$$

$$= -\frac{1}{m(2m-1)} \cdot \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m}-1} \cdot O^{-2m+1} vm$$

Es ist also

250) $$\lg \left\{\frac{\tau p}{\lambda p}\right\} = -\frac{2^2(2^1-1)}{1} .E^{-1} v3.(i\lambda p)^2 - \frac{2^4(2^3-1)}{2} .E^{-1} v5.(i\lambda p)^4 +$$

$$- \frac{2^6(2^5-1)}{3} \cdot E^{-1} v7.(i\lambda p)^6 + \cdots$$

Kreisfunctionen.

§. 85.

Ein besonderer Fall, worin $i = \sqrt{-1}$ ist, ist sehr merkwürdig; es ist nach 155

251) $$\left\{\frac{\varphi n}{\delta^n}\right\}^2 + \left\{\frac{\psi n}{\delta^n}\right\}^2 = 1$$

Diese Annahme schränkt nach vorstehender Gleichung die Grössen $\frac{\varphi n}{\delta^n}$ und $\frac{\psi n}{\delta^n}$ in enge Gränzen ein, und macht, dafs keine von beiden andere Werthe, als zwischen o und +1 haben kann. Da die späteren Glieder aus den ersten Gliedern $\frac{\varphi 1}{\delta^1}$ und $\frac{\psi 1}{\delta^1}$ hergeleitet werden können, so wollen wir eins von diesen beiden Gliedern bestimmen, und für das Folgende festsetzen. Wir nehmen an, dafs

252) $$\frac{\psi 1}{\delta^1} = +1$$

sey. Nach dieser Annahme sind $\frac{\varphi 1}{\delta^1}$, $\tau 1$ und $\lambda 1$ nicht mehr willkürlich, sondern es ist

253) $$\frac{\varphi 1}{\delta^1} = 0\,, \quad \tau 1 = \infty$$

und

254) $$\lambda 1 = 1 + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7} + \ldots\ldots$$
$$= 1{,}57079632\,6784\ldots\ldots$$

Dafs $\frac{\psi 0}{\delta^0} = 0$ und $\frac{\varphi 0}{\delta^0} = +1$ und $\lambda 0 = 0$, ist schon aus 157 bekannt.

Nach Festsetzung von $\frac{\psi 1}{\delta^1}$, $\frac{\varphi 1}{\delta^1}$, lassen sich nun auch vermittelst der Gleichungen

255) $$\frac{\varphi nm}{\delta^{nm}} = k(n,1) \cdot \left\{\frac{\varphi m}{\delta^m}\right\}^n - k(n,3) \cdot \left\{\frac{\varphi m}{\delta^m}\right\}^{n-2} \cdot \left\{\frac{\psi m}{\delta^m}\right\}^2 + \ldots - \ldots$$

und

256) $$\frac{\psi nm}{\delta^{nm}} = k(n,2) \cdot \left\{\frac{\varphi m}{\delta^m}\right\}^{n-1} \cdot \left\{\frac{\psi m}{\delta^n}\right\}^1 - k(n,4) \cdot \left\{\frac{\varphi m}{\delta^m}\right\}^{n-3} \cdot \left\{\frac{\psi m}{\delta^m}\right\}^3 + .. - ..$$

die Werthe aller Hauptglieder finden, denn setzen wir $m = 1$, so ist, da in 255 für das gerade n oder für $2n$ das letzte Produkt

$$k(2n,2n+1) \cdot \left\{\frac{\varphi m}{\delta^m}\right\}^0 \cdot \left\{\frac{\psi m}{\delta^m}\right\}^{2n} \cdot i^{2n} = (-1)^n$$

und für das ungerade n oder für $2n+1$ das letzte Product

$$k(2n+1,2n+1) \cdot \left\{\frac{\varphi m}{\delta^m}\right\}^1 \cdot \left\{\frac{\psi m}{\delta^m}\right\}^{2n} \cdot i^{2n} = 0$$

in 256 für das gerade n oder für $2n$ das letzte Product

$$k(2n,2n) \left\{\frac{\varphi m}{\delta^m}\right\}^1 \left\{\frac{\psi m}{\delta^m}\right\}^{2n-1} \cdot i^{2n-2} = 0$$

und für das ungerade n oder für $2n+1$ das letzte Product

$$k(2n+1,2n+2) \cdot \left\{\frac{\varphi m}{\delta^m}\right\}^0 \left\{\frac{\psi m}{\delta^m}\right\}^{2n+1} \cdot i^{2n} = (-1)^n$$

ist, und die übrigen Glieder verschwinden, für jede ganze Zahl n

257) $$\frac{\varphi 2n}{\delta^{2n}} = (-1)^n, \frac{\varphi(2n+1)}{\delta^{2n+1}} = 0$$

$$\frac{\psi 2n}{\delta^{2n}} = 0 \quad , \frac{\psi(2n+1)}{\delta^{2n+1}} = (-1)^n$$

und $\lambda n = n \times 1{,}5707 \ldots\ldots$

Bei den Gliedern auf der linken Seite müssen wir immer die Gleichungen

$$\frac{\varphi - n}{\delta^{-n}} = \frac{\varphi + n}{\delta^{+n}} \text{ und } \frac{\psi - n}{\delta^{-n}} = -\frac{\psi + n}{\delta^{+n}}$$

berücksichtigen, welche für jedes mögliche n gelten.

Um die Zwischenglieder zu finden, können die Gleichungen

258) $$\frac{\varphi n}{\delta^n} = 1 - \frac{(n\lambda 1)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(n\lambda 1)^4}{1.2.3.4} - \frac{(n\lambda 1)^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\cdots$$

und

259) $$\frac{\psi n}{\delta^n} = \frac{(n\lambda 1)^1}{1} - \frac{(n\lambda 1)^3}{1.2.3} + \frac{(n\lambda 1)^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\cdots$$

gebraucht werden. Mit grossem Vortheile werden hierbei die Gleichungen

260) $$\frac{\varphi(m+n)}{\delta^{m+n}} = \frac{\varphi m}{\delta^m} \cdot \frac{\varphi n}{\delta^n} - \frac{\psi m}{\delta^m} \cdot \frac{\psi n}{\delta^n}$$

und

261) $$\frac{\psi(m+n)}{\delta^{m+n}} = \frac{\varphi m}{\delta^m} \cdot \frac{\psi n}{\delta^n} + \frac{\psi m}{\delta^m} \cdot \frac{\varphi n}{\delta^n}$$

angewendet. Ist eine von den beiden Grössen m und n eine ganze Zahl, z. B. n, so ist

262) $$\frac{\varphi(m+2n)}{\delta^{m+2n}} = (-)^n \cdot \frac{\varphi m}{\delta^m} \text{ und}$$

263) $$\frac{\varphi(m+2n+1)}{\delta^{m+2n+1}} = (-)^{n+1} \cdot \frac{\psi m}{\delta^m}$$

264) $$\frac{\psi(m+2n)}{\delta^{m+2n}} = (-)^n \cdot \frac{\psi m}{\delta^m}$$

265) $$\frac{\psi(m+2n+1)}{\delta^{m+2n+1}} = (-)^n \cdot \frac{\varphi m}{\delta^m}$$

Ist m verneint, so ist

266) $$\frac{\varphi(2n-m)}{\delta^{2n-m}} = (-)^n \frac{\varphi m}{\delta^m}$$

$$\frac{\varphi(2n+1-m)}{\delta^{2n+1-m}} = (-)^n \frac{\psi m}{\delta^m}$$

$$\frac{\psi(2n-m)}{\delta^{2n-m}} = (-)^{n+1}\frac{\Psi m}{\delta^m}$$

$$\frac{\psi(2n+1-m)}{\delta^{2n+1-m}} = (-)^{n}\frac{\varphi m}{\delta^m}$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs die Glieder, welche zwischen $\frac{\psi 0}{\delta 0}$ und $\frac{\psi 1}{\delta 1}$ und zwischen $\frac{\varphi 0}{\delta 0}$ und $\frac{\varphi 1}{\delta 1}$ fallen, sich in den Zwischenräumen von $\psi 1$, $\psi 2$, $\psi 3$, ... und $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\varphi 3$, ... wiederholen, und zwar nach Gesetzen, welche die Zeichen angeben.

FÜNFTE ABHANDLUNG.

Producte gleich zunehmender Factoren.

§. 86.

Eine Reihe von Producten aus gleich viel zunehmenden Factoren bestehend

$$\ldots \frac{1}{(a-3r)(a-2r)(a-r)}, \frac{1}{(a-2r)(a-r)}, \frac{1}{a-r}, a, a(a+r), a(a+r)(a+2r) \ldots\ldots$$

werde vorgestellt durch die Zeichen

$$\ldots a^{-3|r}, a^{-2|r}, a^{-1|r}, a^{0|r}, a^{+1|r}, a^{+2|r}, a^{+3|r}, \ldots.$$

so dafs

267) $$a^{n|r} = a(a+r)(a+2r) \ldots . (a+nr-r)$$

$$a^{-n|r} = \frac{1}{(a-r)(a-2r)(a-3r) \ldots . (a-nr)} = \frac{1}{a^{n|-r}} = \frac{1}{(a-r)^{n|-r}}$$

und $$a^{0|r} = 1$$

Bevor wir zur Entwicklung dieser Producte gehen, bemerken wir folgende Verwandlungen derselben, die

bald im Trennen der Grundgrösse a

268) $$a^{n|r} = a^n \cdot 1^{n|\frac{r}{a}}$$

bald in einer andern Folge der Factoren

269) $$a^{n|r} = (a+nr-r)^{n|-r} \text{ und } a^{-n|r} = \frac{1}{(a-r)^{n|-r}} = \frac{1}{(a-nr)^{n|r}}$$

bald in einer Veränderung des gemeinsamen Unterschiedes r

270) $$a^{n|r} = \left\{\frac{a}{h}\right\}^n \cdot h^{n|\frac{rh}{a}} \text{ und } a^{n|r} = \left\{\frac{r}{h}\right\}^n \cdot \left\{\frac{ha}{r}\right\}^{n|h}$$

bald in einer verschiedenen Gruppirung der Factoren

271) $$a^{n+m|r} = a^{n|r} \cdot (a+nr)^{m|r} = a^{m|r} \cdot (a+mr)^{n|r}$$

bald im Hinzufügen neuer Factoren $(a-mr)(a-mr+r) \ldots (a-2r)(a-r)$

272) $$a^{n|r} = \frac{(a-mr)^{n+m|r}}{(a-mr)^{m|r}}$$

oder der Factoren . . . $(a-mr-nr+r)(a-mr-nr+2r) \ldots (a-nr)$

273) $$a^{n|-r} = \frac{(a-mr-nr+r)^{n+m|r}}{(a-mr-nr+r)^{m|r}}$$

oder der Factoren $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\frac{a}{r} - 1)$

274) $$a^{n|r} = r^n \cdot \frac{1^{n+\frac{a}{r}-1|1}}{1^{\frac{a}{r}-1|1}}$$

oder der Factoren $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\frac{a}{r} - n)$

275) $$a^{n|-r} = r^n \cdot \frac{1^{\frac{a}{r}|1}}{1^{\frac{a}{r}-n|1}}$$

oder der Factoren $(a+r)(a+2r) \ldots (a+nr-r)$

276) $$a = \frac{a^{n|r}}{(a+r)^{n-1|r}} = a^{n|r} \cdot a^{-n+1|-r}$$

besteht.

Besondere Werthe von a, r, n gestatten oft, diese Geschäfte zu vereinigen, es ist z. B.

277) $$1^{2n|1} = 1^{n|1} \cdot (1+n)^{n|1}$$

aber auch

$$1^{2n|r} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n)$$
$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n)$$
$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n \cdot 2^n$$

also

278) $$1^{2n|1} = 2^n \cdot 1^{n|1} \cdot 1^{n|2}$$

mithin auch

279) $$(1+n)^{n|1} = 2^n \cdot 1^{n|2} = (2n)^{n|-1}$$

§. 87.

Diejenigen Producte, deren Factoren auch noch die zweite Potenz von n enthalten, lassen sich sämmtlich in zwei Producte zerlegen, deren Factoren nur n^1 enthalten. Diese Producte haben nämlich die Form

$$(a+1b+1^2c)(a+2b+2^2c)(a+3b+3^2c) \ldots (a+nb+n^2c)$$

Da nun

$$a+nb+n^2b = [nc+\frac{b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2}][n+\frac{b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2c}]$$

also wenn

$$\frac{b+2c-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2} = A$$

und

$$\frac{b+2c+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2} = B$$

gesetzt wird,

$$a+nb+n^2c = \frac{[A+(n-1)c][B+(n-1)c]}{c}$$

so ist das obige Product

$$\frac{A(A+c)(A+2c) \ldots [A+(n-1)c].B(B+c) \ldots [B+(n-1)c]}{c \cdot c \cdot c \ldots c \cdot c \cdot c \ldots c}$$

oder

280) $$(a+1b+1^2c)(a+2b+2^2c) \ldots (a+nb+n^2c) = \frac{A^{n|c} \cdot B^{n|c}}{c^n}$$

Entwicklung von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von a und r.

$$a^{n|r} = \alpha(n,o).a^n r^o + \alpha(n,1).a^{n-1}r^1 + \alpha(n,2).a^{n-2}r^2 + \ldots\ldots$$

§. 88.

Das erste Geschäft, welches bei den Producten der vorgegebenen Reihe vorgenommen werden kann, besteht in dem Vervielfachen oder in dem Messen der Factoren; die Resultate dieses Geschäfts sind nach 1

281) $$a^{+v|r} = a^n + \overset{1}{C}a^{n-1}r^1 + \overset{2}{C}a^{n-2}r^2 + \ldots\ldots + \overset{n-1}{C}a^1 . r^{n-1}$$
$$(1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n-1)$$

und nach 13

282) $$a^{-n|r} = a^{-n} + {}'\overset{1}{C}a^{-n-1}r^1 + {}'Ca^{-n-2}r^2 + {}'\overset{3}{C}a^{-n-5}r^3 + \ldots.$$
$$(1, 2, 3, 4, \ldots n)$$

Die unabhängige Bildungsweise der Glieder dieser Reihen wird nach diesem durch folgende Zeichen bemerkbar gemacht:

283) $$\alpha(+n,p) = \overset{p}{C} \qquad \text{und} \qquad \alpha(-n,p) = {}'\overset{p}{C}$$
$$(1,2,\ldots n-1) \qquad\qquad (1,2,\ldots.n)$$

§. 89.

Da zu der zurücklaufenden Bildungsweise die frühere Untersuchung kein Mittel angiebt, so sind wir hier genöthigt, solche auf einem andern Wege aufzusuchen. Wir bemerken in dieser Hinsicht allgemein, dafs sie sich immer ergiebt, wenn die Entwicklung auf zwei verschiedene Weisen vorgenommen wird. Durch diese zweifache Entwicklung entstehen zwei Rei-

hen, welche zwar auf verschiedene Arten gebildet, aber doch gleich sind, und also gleiche Vorzahlen von gleich hohen Potenzen des reihenden Elements enthalten.

Im gegenwärtigen Falle gehen wir von der Gleichung

$$a^{n+1|r} = (a+nr) \cdot a^{n|r}$$

aus, welche sowohl für das bejahete als verneinte n gilt, und setzen statt der Producte die Reihen

$$\alpha(n+1,0).a^{n+1}r^0+\alpha(n+1,1).a^n.r^1+\alpha(n+1,2).a^{n-1}r^2+\alpha(n+1,3).a^{n-2}r^3+ \ldots =$$
$$= (a+nr)[\alpha(n,0)\, a^n r^0+\alpha(n,1).a^{n-1}r^1+\alpha(n,2).a^{n-2}r^2+\alpha(n,3).a^{n-3}r^3+ \ldots .]$$

Vervielfachen wir die letzte Reihe durch $a+nr$, so erhalten wir durch Gleichsetzung gleich hoher Potenzen des reihenden Elements folgende Gleichungen

$$\alpha(n+1,0) = \alpha(n,0) = 1$$
$$\alpha(n+1,1) = \alpha(n,1)+n \cdot \alpha(n,0)$$
$$\alpha(n+1,2) = \alpha(n,2)+n \cdot \alpha(n,1)$$
$$\alpha(n+1,3) = \alpha(n,3)+n \cdot \alpha(n,2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

welche sämmtlich in folgender begriffen sind

284) $$\alpha(n+1,p) = \alpha(n,p) + n \cdot \alpha(n,p-1)$$

Diese Gleichung weiset die Bildung der Reihe für $n+1$ auf die vorhergehende schon gebildete Reihe für n zurück.

Die zweite zurücklaufende Bildungsweise, welche sich nur auf die vorhergehenden Glieder derselben Reihe beziehet, ergiebt sich auf gleiche Weise, wie die vorige, nämlich durch eine zweifache Entwicklung und durch Gleichsetzung der Vorzahlen gleich hoher Potenzen des reihenden Elements. Wir trennen in dieser Hinsicht vom Producte $a^{n+1|r}$ einmal den ersten und dann wieder den letzten Factor,

$$a \cdot (a + r)^{n|r} = (a + nr) \cdot a^{n|r}$$

oder, da hier die Allgemeinheit nicht leidet, wenn a = 1 gesetzt wird

$$(1 + r)^{n|r} = (1 + nr) \cdot 1^{n|r}$$

setzen statt der Producte die Reihen

$$\alpha(n,0)\, r^0(1+r)^n+\alpha(n,1).r^1(1+r)^{n-1}+\alpha(n,2).r^2.(1+r)^{n-2}+\alpha(n,3).r^3.(1+r)^{n-3}+\ldots =$$
$$= (1+nr).[\alpha(n,0)\, r^0+\alpha(n,1).r^1+\alpha(n,2).r^2+\alpha(n,3).r^3+\ldots]$$

entwickeln die Binomien, sämmtlich begriffen in

$$(1+r)^{n-p} = k(n-p,1).r^0+k(n-p,2).r^1+k(n-p,3).r^2+k(n-p,4).r^3+\ldots$$

und erhalten die Reihen

$$\alpha(n,0)k(n,1).r^0 + \alpha(n,0).k(n,2).r^1 + \alpha(n,0)k(n,3).r^2 + \alpha(n,0)k(n,4).r^3+\ldots$$
$$\alpha(n,1).k(n-1,1) \quad \alpha(n,1)k(n-1,2) \quad \alpha(n,1)k(n-1,3)$$
$$\alpha(n,2)k(n-2,1) \quad \alpha(n,2)k(n-2,2)$$
$$\alpha(n,3)k(n-3,1)$$

$$= \alpha(n,0)r^0 + \alpha(n,1).r^1 + \alpha(n,2).r^2 + \alpha(n,3).r^3 + \ldots$$
$$n\,\alpha(n,0) \quad n.\alpha(n,1) \quad n.\alpha(n,2)$$

deren Vorzahlen zu folgender Gleichung führen

285) $$p \cdot \alpha(n,p) =$$
$$=\alpha(n,0)k(n,p+2)+\alpha(n,1)k(n-1,p+1)+\alpha(n,2)k(n-2,p)+\ldots+\alpha(n,p-1)k(n-p+1,3)$$

die, da n das Zeichen + oder — vor sich haben kann, ganz allgemein die zurücklaufende Bildungsweise der Reihe angiebt.

An diese beiden Gleichungen, 284 und 285, für die zurücklaufende Bildungsweise, schliefst sich noch eine dritte an, die sich ergiebt, wenn in der Gleichung

$$1^{n|r} \cdot 1^{-n|r} = \frac{1}{1+nr}$$

statt der Producte die Reihen gesetzt werden

$$[\alpha(n,0)+\alpha(n,1).r^1+\alpha(n,2)r^2+\ldots][\alpha(-n,0)-\alpha(-n,1)r^1+\alpha(-n,2)r^2-\ldots] =$$
$$= 1-n \cdot r^1 + n^2 \cdot r^2 - n^3 \cdot r^3 + n^4 \cdot r^4 - \ldots + \ldots$$

Wir erhalten hierdurch die Gleichung

286) $\alpha(+n,p)\alpha(-n,o)-\alpha(+n,p-1).\alpha(-n,1)+\alpha(+n,p-2).\alpha(-n,2)-\ldots$
$\ldots(-)^p\alpha(+n,o)\alpha(-n,p) = (-)^p n^p$

welche zeigt, wie die Glieder für das verneinte n aus den Gliedern für das bejahete n hergeleitet werden können.

§. 90.

Für beide n, für +n und —n, finden dieselben zurücklaufenden Bestimmungen statt, aber nicht die unabhängigen Bestimmungen, denn diese sind anders für das bejahete und anders für das verneinte n. Die gemeinsame unabhängige Bildungsweise, welche für jedes n gilt, und die noch aufgesucht werden mufs, erhalten wir aus der zurücklaufenden Bildungsweise, welche durch die Gleichung 285 angegeben ist. Nach dieser ist

1. $\alpha(n,1)=\alpha(n,o).k(n,3)$
2. $\alpha(n,2)=\alpha(n,o).k(n,4)+\alpha(n,1).k(n-1,3)$
3. $\alpha(n,3)=\alpha(n,o).k(n,5)+\alpha(n,1).k(n-1,4)+\alpha(n,2).k(n-2,3)$
4. $\alpha(n,4)=\alpha(n,o).k(n,6)+\alpha(n,1).k(n-1,5)+\alpha(n,2).k(n-2,4)+\alpha(n,3).k(n-3,3)$
5. $\alpha(n,5)=\alpha(n,o).k(n,7)+\alpha(n,1).k(n-1,6)+\alpha(n,2).k(n-2,5)+\alpha(n,3).k(n-3,4)+$
$+\alpha(n,4).k(n-4,3)$

. . . . . .

und folglich, wenn die früheren Werthe in die folgenden Gleichungen eingeführt werden

287) $\alpha(n,o) = 1$

1. $\alpha(n,1)=n^{2|-1}\frac{1}{1^{2|1}}$
2. $\alpha(n,2)=n^{3|-1}\left\{\frac{1}{1^{3|1}}+\frac{n-1}{1.1^{2|1}.1^{2|1}}\right\}$
3. $\alpha(n,3)=n^{4|-1}\left\{\frac{1}{1^{4|1}}+\frac{n-1}{1.1^{3|1}.1^{2|1}}+\frac{n-2}{2.1^{2|1}.1^{3|1}}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}\right\}$

$$4.\ \alpha(n,4)=n^{5|-1}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{1^{5|1}}\\ +\dfrac{n-1}{1.1^{4|1}.1^{2|1}}+\dfrac{n-2}{2.1^{3|1}.1^{3|1}}+\dfrac{n-3}{3.1^{2|1}.1^{4|1}}\\ +\dfrac{(n-1)(n-2)}{1.2.1^{3|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}+\dfrac{(n-1)(n-3)}{1.3.1^{2|1}.1^{3|1}.1^{2|1}}+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2.3.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{3|1}}\\ +\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}\end{array}\right.$$

$$5.\ \alpha(n,5)=n^{6|-1}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{1^{6|1}}\\ +\dfrac{n-1}{1.1^{5|1}.1^{2|1}}+\dfrac{n-2}{2.1^{4|1}.1^{3|1}}+\dfrac{n-3}{3.1^{3|1}.1^{4|1}}+\dfrac{n-4}{4.1^{2|1}.1^{5|1}}\\ +\dfrac{(n-1)(n-2)}{1.2.1^{4|1}1^{2|1}1^{2|1}}+\dfrac{(n-1)(n-3)}{1.3.1^{3|1}1^{3|1}1^{2|1}}+\dfrac{(n-1)\,n-4)}{1.4.1^{3|1}1^{2|1}.1^{3|1}}+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2.3.1^{2|1}1^{4|1}1^{2|1}}+\dfrac{(n-2)(n-4}{2.4.1^{2|1}1^{3|1}1^{3|1}}\\ \vdots\\ +\dfrac{(n-3)(n-4)}{3.4.1^{2|1}.1^{2|1}1^{4|1}}\\ +\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.1^{3|1}.1^{2|1}.1^{2|1}1^{2|1}}+\dfrac{(n-1)(n-2)n-4)}{1.2.4.1^{2|1}.1^{3|1}.1^{2|1}1^{1|1}}+\dfrac{(n-1)(n-3)(n-4)}{1.3.4.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{3|1}1^{2|1}}\\ +\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}1^{3|1}}\\ +\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}\end{array}\right.$$

u. s. w.

Das Bildungsgesetz liegt hier deutlich vor, ist aber zu sehr zusammengesetzt, als dafs wir besondere Zeichen für solches festsetzen oder es durch Worte weitläufig erklären sollten. Es ist leicht, nach diesem Gesetze die folgenden Glieder zu bilden.

§. 91.

Dieses Bildungsgesetz beruht vorzüglich auf den Producten aus den Factoren n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... Wir wollen diese Producte nach

den Potenzen von n ordnen, und die Vorzahlen mit β bezeichnen; es ist

$$\alpha(n,1) = \beta(1,1).n^1+\beta(1,2).n^2$$

$$\alpha(n,2) = \beta(2,1).n^1+\beta(2,2).n^2+\beta(2,3).n^3+\beta(2,4).n^4$$

$$\alpha(n,3) = \beta(3,1).n^1+\beta(3,2).n^2+\beta(3,3).n^3+\beta(3,4).n^4+\beta(3,5).n^5+\beta(3,6).n^6$$

. . . . . .

und allgemein

288) $$\alpha(n,m) = \beta(m,1).n^1+\beta(m,2).n^2+\beta(m,3).n^3+ \ldots +\beta(m,2m).n^{2m}$$

Das Gesetz, nach welchem diese Vorzahlen $\beta(m,1)$, $\beta(m,2)$, $\beta(m,3)$, $\beta(m,4)$ .... gebildet werden müssen, kann zwar aus dem Obigen für α in 287 hergeleitet werden, ist aber so verwickelt, dafs wir kier nur bei der ersten Vorzahl $\beta(m,1)$ stehen bleiben müssen. Wir finden, dafs

289) $$\beta(1,1) = -\frac{1}{1^{2|1}}$$

$$\beta(2,1) = +1^{1|1}\left\{\frac{1}{1^{3|1}} - \frac{1}{1^{2|1}.1^{2|1}}\right\}$$

$$\beta(3,1) = -1^{2|1}\left\{\frac{1}{1^{4|1}} - \frac{1}{1^{3|1}.1^{2|1}} - \frac{1}{1^{2|1}.1^{3|1}} + \frac{1}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}\right\}$$

$$\beta(4,1) = +1^{3|1}\left\{ + \frac{1}{1^{5|1}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1^{4|1}.1^{2|1}} - \frac{1}{1^{3|1}.1^{3|1}} - \frac{1}{1^{2|1}.1^{4|1}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1^{3|1}.1^{2|1}.1^{2|1}} + \frac{1}{1^{2|1}.1^{3|1}.1^{2|1}} + \frac{1}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{3|1}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}\right\}$$

$$\beta(5,1) = -1^{4|1}\left\{ + \frac{1}{1^{6|1}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1^{5|1}.1^{2|1}} - \frac{1}{1^{4|1}.1^{3|1}} - \frac{1}{1^{3|1}.1^{4|1}} - \frac{1}{1^{2|1}.1^{5|1}}\right.$$

$$+\frac{1}{1^{4|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}+\frac{1}{1^{3|1}.1^{3|1}.1^{2|1}}+\frac{1}{1^{3|1}.1^{2|1}.1^{3|1}}+\frac{1}{1^{2|1}.1^{4|1}.1^{2|1}}+\frac{1}{1^{2|1}.1^{3|1}.1^{3|1}}$$

$$+\frac{1}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{4|1}}$$

$$-\frac{1}{1^{3|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}-\frac{1}{1^{2|1}.1^{3|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}-\frac{1}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{3|1}.1^{2|1}}$$

$$-\frac{1}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{3|1}}$$

$$+\frac{1}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}\Big\}$$

oder

290)
$$\beta(1,1) = -1^{0|1}\,.\,{}^{1}C$$

$$\beta(2,1) = +1^{1|1}\,.({}^{1}C - {}^{2}C)$$

$$\beta(3,1) = -1^{2|1}\,.({}^{1}C - {}^{2}C + {}^{3}C)$$

$$\beta(4,1) = +1^{3|1}\,.({}^{1}C - {}^{2}C + {}^{3}C - {}^{4}C)$$

. . . . . .

$$\beta(m,1) = (-)^{m}\,.\,1^{m-1|1}.({}^{1}C - {}^{2}C + {}^{3}C - {}^{4}C + \ldots (-)^{m-1}\,{}^{m}C)$$

aus den $\frac{1}{1^{2|1}}, \frac{1}{1^{3|1}}, \frac{1}{1^{4|1}}, \frac{1}{1^{5|1}}$ . . . . . .

Elementen 1 2 3 4

Diese Bildungsweise erinnert uns an ein früheres Polynomium E^{-1}, welches nach 15 und 17

$$\left\{\frac{1}{1^{1|1}}+\frac{x^1}{1^{2|1}}+\frac{x^2}{1^{3|1}}+\frac{x^3}{1^{4|1}}+\ldots\right\}^{-1}=\left\{\frac{e^x-1}{x}\right\}^{-1}=E^{-1}=$$

$$= 1 - {}^{1}\overset{1}{C}x^{1} - {}^{2}\overset{1}{C}x^{2} - {}^{3}\overset{1}{C}x^{3} - {}^{4}\overset{1}{C}x^{4} - \ldots$$

$$+ {}^{2}\overset{2}{C} + {}^{3}\overset{2}{C} + {}^{4}\overset{2}{C}$$

$$- {}^{5}\overset{3}{C} - {}^{4}\overset{3}{C}$$

$$+ {}^{4}\overset{4}{C}$$

aus den $\frac{1}{1^{2|1}}, \frac{1}{1^{3|1}}, \frac{1}{1^{4|1}}, \ldots$

Elementen $1, 2, 3,$

$$= E^{-1}v1 + E^{-1}v2 \cdot x^{1} + E^{-1}v3 \cdot x^{2} + E^{-1}v4 \cdot x^{3} + \ldots$$

Es ist folglich

291) $$\beta(1,1) = + 1^{0|1} \cdot E^{-1}v2$$
$$\beta(2,1) = - 1^{1|1} \cdot E^{-1}v3$$
$$\beta(3,1) = + 1^{2|1} \cdot E^{-1}v4$$
$$\beta(4,1) = - 1^{3|1} \cdot E^{-1}v5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta(m,1) = (-)^{m-1} \cdot 1^{m-1|1} \cdot E^{-1}v(m+1)$$

Diese merkwürdige Uebereinstimmung der Vorzahlen β mit den Gliedern des Polynomiums E^{-1} gestattet uns nun, die Eigenschaften letzterer auch auf jene zu übertragen. Bemerken wir nämlich hier nur unter vielen andern die Eigenschaft 109, dafs

$$E^{-1}v2 = -\tfrac{1}{2},\ E^{-1}v4 = E^{-1}v6 = E^{-1}v8 = \ldots = E^{-1}v2m = 0$$

so ist auch hier

292) $\beta(1,1) = -\frac{1}{2}$ und $\beta(3,1) = \beta(5,1) = \beta(7,1 = \ldots\ \beta(2m+1) = 0$

§. 92.

Da die unabhängige Bestimmung der übrigen Glieder mit so vielen Schwierigkeiten verbunden ist, so wollen wir hier wenigstens noch ihre zurück-

laufende Bildungsweise angeben; wir finden diese, wenn wir in die Gleichung 284

$$\alpha(n+1,m) = \alpha(n,m) + n \cdot \alpha(n,m-1)$$

die Entwicklungen einführen

$$\beta(m,2m).(n+1)^{2m}+\beta(m,2m-1).(n+1)^{2m-1}+\beta(m,2m-2).(n+1)^{2m-2}+$$
$$+\beta(m,2m-3).(n+1)^{2m-3}+ \ldots . =$$
$$= \beta(m,2m).n^{2m}+\beta(m,2m-1).n^{2m-1}+\beta(m,2m-2).n^{2m-2}+\beta(m,2m-3).n^{2m-3}+\ldots.$$
$$\beta(m-1,2m-2) \quad \beta(m-1,2m-3) \quad \beta(m-1,2m-4)$$

und die Vorzahlen gleichhoher Potenzen von n gleichsetzen, nämlich

293) $\beta(m-1,2m-2)=k(2m,2).\beta(m,2m)$

$\beta(m-1,2m-3)=k(2m,3).\beta(m,2m)+k(2m-1,2)\,\beta(m,2m-1)$

$\beta(m-1,2m-4)=k(2m,4).\beta(m,2m)+k(2m-1,3).\beta(m,2m-1)+$
$+ k(2m-2,2).\beta(m,2m-2$

. . . . . .

Ausser diesen Gleichungen für die zurücklaufende Bildungsweise der Grösen β giebt es noch andere zu demselben Zwecke; sie ergeben sich, wenn in der Gleichung 286 für α ihre Entwicklungen aus 288 eingeführt, und die Vorzahlen gleichhoher Potenzen von n gleichgesetzt werden. Wir erhalten aus

$$\alpha(n,1) - \alpha(-n,1) = -n^1$$

die Gleichung

294) $$2\beta(1,1) = 1$$

aus $\alpha(n,2)-\alpha(n,1)\alpha(-n,1)+\alpha(-n,2) = +n^2$

die Gleichungen

295) $$2\beta(2,2) + \beta(1,1) \cdot \beta(1,1) = +1$$
$$2\beta(2,4) - \beta(1,2) \cdot \beta(1,2) = 0$$

aus

$$\alpha(n,3) - \alpha(n,2)\alpha(-n,1)+\alpha(n,1).\alpha(-n,2)-\alpha(-n,3) = -n^3$$

die Gleichungen

296) $$2\beta(3,1) = 0$$
$$2\beta(3,3)+2\beta(1,1)\,\beta(2,2)-2\beta(1,2).\beta(2,1) = -1$$
$$2\beta(3,5)+2\beta(1,1)\,\beta(2,4)-2\beta(1,2).\beta(2,3) = 0$$

aus

$$\alpha(n,4)-\alpha(n,3)\,\alpha(-n,1)+\alpha(n,2).\alpha(-n,2)-\alpha(n,1)\alpha(-n,3)+\alpha(-n,4) = +n^4$$

die Gleichungen

297) $$2\beta(4,2) + 2\beta(1,1)\,.\,\beta(3,1) - \beta(2,1)\,.\,\beta(2,1) = 0$$
$$2\beta(4,8) - 2\beta(1,2)\,.\,\beta(3,6) + \beta(2,4)\,.\,\beta(2,4) = 0$$

u. s. w.

Entwicklung der Reihe

$$a^n = \delta(n,0).a^{n|r} + \delta(n,1).r^1 a^{n-1|r} + \delta(n,2).r^2.a^{n-2|r} + \delta(n,3).r^3.a^{n-3|r} + \ldots$$

§. 93.

Wir haben in den vorigen §§. die Glieder der Reihe mit gleichen Unterschieden in Reihen nach den Potenzen der Grundgrösse a entwickelt. Letztere lassen sich durch erstere wieder darstellen.

Bei der Umkehrung dieser Reihe legen wir die Gleichung

$$a \,.\, a^{n|r} = a^{n+1|r} - n \,.\, r \,.\, a^{n|r} \,.\,.\,.\,.\,. P$$

zum Grunde, und beginnen das Geschäft damit, dafs wir die Gleichung

$$a = a^{1|r}$$

mit a vervielfachen, und in der vorigen Gleichung $n = 1$ setzen

$$a^2 = a \,.\, a^{1|r} = a^{2|r} - 1 \,.\, r \,.\, a^{1|r}$$

Wir vervielfachen diese Gleichung mit a, und setzen in P, $n = 2$ und dann $= 1$; es entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned} a^3 &= a.a^{2|r} - 1 \,.\, r \,.\, a \,.\, a^{1|r} \\ &= a^{3|r} - 2 \,.\, r \,.\, a^{2|r} - 1 \,.\, r \,.\, (a^{2|r} - 1 \,.\, r \,.\, a^{1|r}) \\ &= a^{3|r} - \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \,.\, r^1 \,.\, a^{2|r} + 1 \,.\, 1 \,.\, r^2 \,.\, a^{1|r} \end{aligned}$$

Diese Gleichung vervielfachen wir mit a und setzen in der Gleichung P, $n = 3, 2, 1$; wir erhalten folgende

$$\begin{aligned} a^4 &= a \,.\, .a^{3|r} - \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} r^1 \,.\, a \,.\, a^{2|r} + 1 \,.\, 1 \,.\, r^2 \,.\, a \,.\, a^{1|r} \\ &= a^{4|r} - 3 \,.\, r \,.\, a^{3|r} - \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} r^1 \,.\, (a^{3|r} - 2r \,.\, a^{2|r}) + 1.1.r^2.(a^{2|r} - 1.r.a^{1|r}) \\ &= a^{4|r} - \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} r^1 \,.\, a^{3|r} + \begin{vmatrix} 2 \,.\, 2 \\ 1 \,.\, 2 \\ 1 \,.\, 1 \end{vmatrix} . r^2 \,.\, a^{2|r} - 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, r^3 \,.\, a^{1|r} \end{aligned}$$

Auf gleiche Art gehen wir von a^4 zu a^5 über; wir vervielfachen die letzte Gleichung mit a, nnd setzen in P, $n = 4,3,2,1$, und erhalten folgende

$$a^5 = a \,.\, a^{1|r} - \begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}\Big| r^1 \,.\, a \,.\, a^{3|r} + \begin{matrix}2\,.\,2\\1\,.\,2\\1\,.\,1\end{matrix}\Big| r^2 \,.\, a \,.\, a^{2|r} - 1\,.\,1\,.\,1\, r^3 \,.\, a^{1|r}$$

$$= a^{5|r} - 4 \,.\, r \,.\, a^{4|r} - \begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}\Big| r^1 (a^{4|r} - 3 \,.\, r \,.\, a^{3|r})$$

$$+ \begin{matrix}2\,.\,2\\1\,.\,2\\1\,.\,1\end{matrix}\Big| r^2 \,.\, (a^{3|r} - 2 \,.\, r \,.\, a^{2|r}) - 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, r^3 \,.\, (a^{2|r} - 1 \,.\, r \,.\, a^{1|r})$$

$$= a^{5|r} - \begin{matrix}4\\3\\2\\1\end{matrix}\Big| r^1 \,.\, a^{4|r} + \begin{matrix}3\,3\\2\,.\,3\\1\,.\,3\\2\,.\,2\\1\,.\,2\\1\,.\,1\end{matrix}\Big| r^2 \,.\, a^{3|r} - \begin{matrix}2\,.\,2\,.\,2\\1\,.\,2\,.\,2\\1\,.\,1\,.\,2\\1\,.\,1\,.\,1\end{matrix}\Big| r^3 \,.\, a^{2|r} + 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, r^4 \,.\, a^{1|r}$$

Es entstehen hier die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... , so dafs

$$a^1 = a^{1|r}$$

$$a^2 = a^{2|r} - {}'\overset{1}{C} r^1 \,.\, a^{1|r}$$
$$(1)$$

$$a^3 = a^{3|r} - {}'\overset{1}{C} r^1 \,.\, a^{2|r} + {}'\overset{2}{C} r^2 \,.\, a^{1|r}$$
$$(1,2) \qquad (1)$$

$$a^4 = a^{4|r} - {}'\overset{1}{C} r^1 \,.\, a^{3|r} + {}'\overset{2}{C} r^2 \,.\, a^{2|r} - {}'\overset{3}{C} r^3 \,.\, a^{1|r}$$
$$(1,2,3) \quad (1,2) \quad (1)$$

$$a^5 = a^{5|r} - {}'\overset{1}{C} r^1 \,.\, a^{4|r} + {}'\overset{2}{C} r^2 \,.\, a^{3|r} - {}'\overset{3}{C} r^3 \,.\, a^{2|r} + {}'\overset{4}{C} r^4 \,.\, a^{1|r}$$
$$(1,2,3,4) \quad (1,2,3) \quad (1,2) \quad (1)$$

Das Gesetz, nach welchem diese Reihen fortgehen, liegt deutlich vor. Es ist nur noch übrig, den Uebergang der vorhergehenden Gleichung

298) $$a^n = a^{n|r} - {}'\overset{r}{C}.r^1.a^{n-1|r} + {}'\overset{2}{C}r^2.a^{n-2|r} - {}'\overset{3}{C}r^3\,a^{n-3|r} + \ldots.$$
$$(1,2,\ldots n-1)\quad(1,2,\ldots n-2)\quad(1,2,\ldots n-3)$$
$$\ldots.(-)^{n-1}.{}'\overset{n-r}{C}.r^{n-1}.a^{1|r}$$
$$(1)$$

zu der unmittelbar folgenden im Allgemeinen zu zeigen. Wir vervielfachen diese Gleichung mit a, und setzen

$$a.a^{n|r} = a^{n+1|r} - n.r.a^{n|r}$$
$$a.a^{n-1|r} = a^{n|r} - (n-1).r.a^{n-1|r}$$
$$a.a^{n-2|r} = a^{n-1|r} - (n-2).r.a^{n-2|r}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a.a^{1|r} = a^{2|r} - 1.r.a^{1|r}$$

Die nächstfolgende Gleichung ist also

$$a^{n+1} = a^{n+1|r} - n\left|\begin{matrix}\\ -{}'\overset{1}{C}\\ (1,2,\ldots n-1)\end{matrix}\right| r^1.a^{n|r} + (n-1){}'\overset{1}{C}\left|\begin{matrix}\\ +{}'\overset{2}{C}\\ (1,2,\ldots n-2)\end{matrix}\right| r^2.a^{n-1|r} - (n-2){}'\overset{2}{C}\left|\begin{matrix}\\ -{}'\overset{3}{C}\\ (1,2,\ldots n-3)\end{matrix}\right| r^3.a^{n-2|r}+\ldots..$$

Da nun

$$(n-p){}'\overset{p}{C} + \overset{p+r}{C} = {}'\overset{p+r}{C}$$
$$(1,2,\ldots,n-p)\quad(1,2,\ldots,n-p-1)\quad(1,2,\ldots,n-p)$$

ist, so nimmt diese Gleichung dieselbe Gestalt an, welche der Gleichung 298 eigenthümlich ist, nämlich

$$a^{n+1} = a^{n+1|r} - {}'\overset{1}{C}r^1\,.\,a^{n|r} + {}'\overset{2}{C}r^2\,.\,a^{n-1|r}$$
$$(1,2,\ldots n)\quad(1,2,\ldots n-1)$$

§. 94.

Die Gleichung 298 gilt jedoch nur für das bejahete n; bei einem verneinten n müssen wir von der Gleichung

$$a^{-1} = a^{-1|r} - 1 \cdot r \cdot \frac{a^{-1|r}}{a}$$

ausgehen, und vermittelst der Hülfsgleichung

$$\frac{a^{-n|r}}{a} = a^{-n-1|r} - (n+1)r \cdot \frac{a^{-n-1|r}}{a} \quad \ldots\ldots Q$$

das letzte Glied $\frac{a^{-1|r}}{a}$ in zwei andere Producte zerlegen

$$\frac{a^{-1|r}}{a} = a^{-2|r} - 2 \cdot r \cdot \frac{a^{-2|r}}{a}$$

wodurch sie in folgende übergeht

$$a^{-1} = a^{-1|r} - 1 \cdot r \cdot (a^{-2|r} - 2 \cdot r \cdot \frac{a^{-2|r}}{a} -)$$

$$= a^{-1|r} - 1 \cdot r \cdot a^{-2|r} + 1 \cdot 2 \cdot r^2 \cdot \frac{a^{-2|r}}{a} -$$

Wird durch die Hülfsgleichung Q das letzte Glied dieser Gleichung

$$\frac{a^{-2|r}}{a} - = a^{-3|r} - 3 \cdot r \cdot \frac{a^{-3|r}}{a}$$

in zwei andere Producte zerlegt, so wird

$$a^{-1} = a^{-1|r} - 1 \cdot r \cdot a^{-2|r} + 1 \cdot 2 \cdot r^2 \cdot (a^{-3|r} - 3 \cdot r \cdot \frac{a^{-3|r}}{a} -)$$

$$= a^{-1|r} - 1 \cdot r \cdot a^{-2|r} + 1 \cdot 2 \cdot r^2 \cdot a^{-3|r} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^3 \cdot \frac{a^{-3|r}}{a} -$$

Vermittelst der Hülfsgleichung Q sind wir im Stande, diese Reihe so weit fortzusetzen, als wir wollen. Wir können sie durch folgende Zeichen darstellen

299) $$a^{-1} = a^{-1|r} - 1^{1|1} \cdot r^1 \cdot a^{-2|r} + 1^{2|1} \cdot r^2 \cdot a^{-3|r} - 1^{3|1} \cdot r^3 \cdot a^{-4|r} + \ldots$$

$$\ldots (-)^p \cdot 1^{p|1} \cdot r^p \cdot a^{-p-1|r} + (-)^{p+1} \cdot 1^{p+1|1} \cdot r^{p+1} \cdot \frac{a^{-p-1|r}}{a} -$$

Nichts hindert, diese Reihe unendlich anzunehmen, und dann ist

$$300)\quad a^{-r} = a^{-r|r} - 1^{r|r}.r^{r}.a^{-2|r} + 1^{2|1}.r^{2}.a^{-3|r} - 1^{3|1}.r^{3}.a^{-4|r} + \ldots - \ldots.$$

$$= a^{-1|r} - \overset{1}{C}.r^{1}.a^{-2|r} + \overset{2}{C}.r^{2}.a^{-3|r} - \overset{3}{C}.r^{3}.a^{-4|r} + \ldots..$$

$$(1) \qquad (1,2) \qquad (1,2,3)$$

§. 95.

Um die Entwicklung von a^{-2} zu erhalten, messen wir die vorstehende Reihe durch a,

$$a^{-2} = \frac{a^{-1|r}}{a} - 1.r^{1}.\frac{a^{-2|r}}{a} + 1.2.r^{2}.\frac{a^{-3|r}}{a} - 1.2.3.r^{3}.\frac{a^{-4|r}}{a} + \ldots$$

Diese Gleichung geht, wenn wir nach der obigen Hülfsgleichung Q

$$\frac{a^{-1|r}}{a} = a^{-2|r} - 2 \cdot r^{1} \cdot \frac{a^{-2|r}}{a}$$

setzen, in folgende über

$$a^{-2} = a^{-2|r} - \left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right| r^{1}.\frac{a^{-2|r}}{a} + 1.2.r^{2}.\frac{a^{-3|r}}{a} - 1.2.3.r^{3}.\frac{a^{-4|r}}{a} + \ldots..$$

Setzen wir in dieser nach der Hülfsgleichung Q

$$\frac{a^{-2|r}}{a} = a^{-3|r} - 3 \cdot r \cdot \frac{a^{-3|r}}{a}$$

so geht sie über in folgende

$$a^{-2} = a^{-2|r} - \left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right| r^{1}.a^{-3|r} + \left|\begin{matrix}1\,2\\1.3\\2.3\end{matrix}\right| r^{2}.\frac{a^{-3\,r}}{a} - 1.2.3.r^{3}.\frac{a^{-4|r}}{a} + \ldots.$$

und wenn wir

$$\frac{a^{-3\,r}}{a} = a^{-4|r} - 4 \cdot r \cdot \frac{a^{-4|r}}{a}$$

setzen, in folgende

$$a^{-2} = a^{-2|r} - \left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right| r^1.a^{-3|r} + \left|\begin{matrix}1.2\\1.3\\2.3\end{matrix}\right| r^2.a^{-4|r} - \left|\begin{matrix}1.2.3\\1.2.4\\1.3.4\\2.3.4\end{matrix}\right| r^3.\frac{a^{-4|r}}{a} + 1.2.3.4.r^4.\frac{a^{-5|r}}{a} - \ldots$$

Hier entsteht eine Reihe, in welcher die Vorzahlen von $a^{-3|r}$, $a^{-4|r}$, ... die geordneten Verbindungen zu einem, zweien, dreien, ... Elementen aus den Elementen 1,2 1,2,3 1,2,3,4 .... ohne Wiederholungen sind, so dafs

$$a^{-2} = a^{-2|r} - \overset{1}{C}_{(1,2)} r^1.a^{-3|r} + \overset{2}{C}_{(1,2,3)} r^2.a^{-4|r} - \overset{3}{C}_{(1,2,3,4)} r^3.a^{-5|r} + \ldots$$

$$\ldots(-)^p.\overset{p}{C}_{(1,2,..p+1)} r^p.a^{-p-2|r} + (-)^{p+1}.\overset{p+1}{C}_{(1,2,...p+2)} r^{p+1}.\frac{a^{-p-2|r}}{a} +$$

$$+(-)^{p+2}.1.2.3...(p+2).r^{p+2}.\frac{a^{-p-3|r}}{a} + \ldots$$

Setzen wir in dieser Gleichung

$$\frac{a^{-p-2|r}}{a} = a^{-p-3\,r} - (p+3)r.\frac{a^{-p-3\,r}}{a}$$

so entsteht aus $(-)^{p+1}\overset{p+1}{C}_{(1,2,...p+2)} r^{p+1}.\frac{a^{-p-2\,r}}{a}$ das folgende Glied $(-)^{p+1}\overset{p+1}{C}_{(1,2,..p+2)} r^{p+1}a^{-p-3|r}$

und es gesellet sich $(-)^{p+2}(p+3)\overset{p+1}{C}_{(1,2,...p+2)} r^{p+2}.\frac{a^{-p-3|r}}{a}$

zu $(-)^{p+2}.1.2...(p+2).r^{p+2}.\frac{a^{-p-3|r}}{a}$

wodurch, da

$$(p+3)\overset{p+1}{C}_{(1,2,..p+2)} + 1.2.3...(p+2) = \overset{p+2}{C}_{(1,2,...p+3)}$$

ist, die vollständigen Verbindungen aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots, p+3$

zu p+2 Elementen ohne Wiederholungen entstehen, welche als das nächstfolgende Glied in der Reihe erscheinen. Es ist also

$$301) \qquad a^{-2} = a^{-2|r} - \overset{1}{C}r^1.a^{-3|r} + \underset{(1,2)}{\overset{2}{C}}r^2.a^{-4|r} - \underset{(1,2,3)}{\overset{3}{C}}r^3.a^{-5|r} + \ldots - \ldots$$
$$(1,2,3,4)$$

§. 96.

So wie wir von a^{-1} zu a^{-2} gekommen sind, eben so gelangen wir von a^{-2} zu a^{-3}; wir messen die letztgefundene Reihe durch a, und setzen nach der Hülfsgleichung Q

$$\frac{a^{-2|r}}{a} = a^{-3|r} - 3r \cdot \frac{a^{-3|r}}{a}$$

$$(3+\overset{1}{C})r^1.\frac{a^{-3|r}}{a} = \underset{(1,2)}{\overset{1}{C}}.r^1.\frac{a^{-3|r}}{a} = \underset{(1\ ,\ 2\ ,\ 3)}{\overset{1}{C}}.r^1.a^{-4|r} - 4.\overset{1}{C}.r^2.\frac{a^{-4|r}}{a}$$

$$(4\overset{1}{C}+\overset{2}{C})r^2.\frac{a^{-4|r}}{a} = \underset{(1,2,3)}{\overset{2}{C}}r^2.\frac{a^{-4|r}}{a} = \underset{(1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4)}{\overset{2}{C}}r^2.a^{-5|r} - 5.\overset{2}{C}r^3.\frac{a^{-5|r}}{a}$$

und allgemein

$$[(p+3)\overset{p}{C} + \overset{p+1}{C}]r^{p+1}.\frac{a^{-p-3|r}}{a} =$$
$$(1,2,\ldots p+2)$$
$$= \underset{(1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ p+3)}{\overset{p+1}{C}}r^{p+1}.\frac{a^{-p-3|r}}{a} = \overset{p+1}{C}r^{p+1}.a^{-p-4|r} - (p+4)\overset{p+1}{C}r^{p+2}.\frac{a^{-p-4|r}}{a}$$

und erhalten hierdurch folgende Reihe

$$302) \qquad a^{-3} = a^{-3|r} - \overset{1}{C}r^1.a^{-4|r} + \underset{(1,2,3,4)}{\overset{2}{C}}r^2.a^{-5|r} - \underset{(1,2,3,4,5)}{\overset{2}{C}}r^3.a^{-6|r} + \ldots - \ldots$$
$$(1,2,3)$$

Der Weg von der vorhergehenden zu der folgenden Reihe ist hier vorgezeichnet, und die allgemeinen Gleichungen

$$\frac{a^{-n|r}}{a} = a^{-n-1|p} - (n+1) \cdot r \cdot \frac{a^{-n-1|r}}{a}$$

und

$$(p+m)\overset{p}{C}_{(1,2,\ldots,p+m-1)} + \overset{p+1}{C}_{(1,2,\ldots,p+m-1)} = \overset{p+1}{C}_{(1,2,\ldots,p+m)}$$

auf die eben erklärte Weise miteinander verbunden, führen auch zu folgender allgemeinen Reihe

$$303) \quad a^{-n} = a^{-n|r} - \overset{1}{C}_{(1,2,\ldots,n)} r^1 . a^{-n-1|r} + \overset{2}{C}_{(1,2,\ldots,n+1)} r^2 . a^{-n-2|r} - \overset{3}{C}_{(1,2,\ldots,n+2)} r^3 . a^{-n-3|r} + \ldots - \ldots$$

Die unabhängige Bildungsweise der Glieder für diese umgekehrten Reihen ist also

$$304) \quad \delta(+n,m) = (-)^m . \overset{m}{C}_{(1,2,\ldots,n-m)} = (-)^m \cdot \alpha(-n+m,m)$$

$$\delta(-n,m) = (-)^m . \overset{m}{C}_{(1,2,3,\ldots,n+m-1)} = (-)^m \cdot \alpha(n+m,m)$$

§. 97.

Die zurücklaufende Bildungsweise gewinnen wir, wenn wir nach vorstehenden Gleichungen das α in δ übertragen. Wir erhalten hierdurch die Gleichung

$$305) \quad \delta(n+1,m) = \delta(n,m) - (n-m+1) \cdot \delta(n,m-1)$$

Eine zweite zurücklaufende Bestimmung erhalten wir, wenn wir in die Reihe

$$a^n = \delta(n,0) \cdot a^{n|r} + \delta(n,1) \cdot r^1 \cdot a^{n-1|r} + \delta(n,2) \cdot r^2 \cdot a^{n-2|r} + \ldots .$$

die Entwicklungen der Producte $a^{n|r}$, $a^{n-1|r}$, ... einführen

$$a^n = \delta(n,0) \cdot [\alpha(n,0) \cdot a^n \cdot r^0 + \alpha(n,1) \cdot a^{n-1} \cdot r^1 + \alpha(n,2) \cdot a^{n-2} r^2 + \ldots$$
$$+ \delta(n,1) \cdot [\quad \alpha(n-1,0) \quad + \alpha(n-1,1)$$
$$\delta(n,2) \cdot [\quad + \alpha(n-2,0)$$

und nun die Vorzahlen gleichhoher Potenzen von a und r gleichsetzen. Die Gleichungen, welche hierdurch entstehen, sind

306) $1 = \delta(n,0) . \alpha(n,0)$

$0 = \delta(n,0) . \alpha(n,1) + \delta(n,1) . \alpha(n-1,0)$

$0 = \delta(n,0) . \alpha(n,2) + \delta(n,1) . \alpha(n-1,1) + \delta(n,2) . \alpha(n-2,0)$

. . . . . .

$0 = \delta(n,0) . \alpha(n,m) + \delta(n,1) . \alpha(n-1,m-1) + \delta(n,2) . \alpha(n-2,m-2) + \ldots .$
$\ldots + \delta(n,m) . \alpha(n-m,0)$

Entwicklung der Reihe

$$(a+b)^{n|r} = k(n,1).a^{n|r}.b^{0|r}+k(n,2).a^{n-1|r}.b^{1|r}+k(n,3).a^{n-2|r}.b^{2|r} + \ldots$$

§. 98.

Es ist

$$(a+b)^{1|r} = a+b = a^{1|r}+b^{1|r}$$

Ferner ist

$$(a+b)^{2|r} = (a+b)(a+b+r) = (a^{1|r}+b^{1|r})(a+b+r)$$

Den neuen Factor a+b+r zerlegen wir auf zwei Arten, zuerst in a+r und b, und dann in a und b+r, vervielfachen das erste Product $a^{1|r}$ mit der ersten Zerlegung und das zweite Product $b^{1|r}$ mit der zweiten Zerlegung

$$(a+b)^{2|r} = a^{1|r} \,.\, (a+r) + a^{1|r} \,.\, b$$

$$+ b^{1|r} \,.\, a + b^{1|r} \,.\, (b + r)$$

und erhalten durch Vereinigung der untereinander stehenden Producte folgende

$$(a+b)^{2|r} = a^{2|r} + 2 \,.\, a^{1|r} \,.\, b^{1|r} + b^{2|r}$$

Beim Uebergange zum folgenden Producte $(a+b)^{3|r}$ vervielfachen wir die vorstehenden mit dem neuen Factor a+b+2r und zwar

$$a^{2|r} \text{ mit } a+2r \text{ und } b$$

$$2 \,.\, a^{1|r} \,.\, b^{1|r} \text{ mit } a+r \text{ und } b+r$$

$$b^{2|r} \text{ mit } a \text{ umd } b+2r$$

und erhalten

$$(a+b)^{3|r} = a^{2|r}.(a+2r) + a^{2|r}.b$$

$$+2a^{1|r}.b^{1|r}.(a+r)+2a^{1|r}.b^{1|r}.(b+r)$$

$$+ b^{2|r}.a+b^{2|r}.(b+2r)$$

$$= a^{3|r}+3a^{2|r}.b^{1|r}+3.a^{1|r}.b^{2|r}+b^{3|r}$$

Das folgende Product $(a+b)^{4|r}$ erfordert den neuen Factor $a+b+3r$; wir vervielfachen

$a^{3|r}$ mit $a+3r$ und b
$3a^{2|r}b^{1|r}$ mit $a+2r$ und $b+r$
$3a^{1|r}b^{2|r}$ mit $a+r$ und $b+2r$
$b^{3|r}$ mit a und $b+3r$

und erhalten folgende Gleichung

$$(a+b)^{4|r} = a^{3|r}.(a+3r)+a^{3|r}.b$$
$$+3a^{2|r}.b^{1|r}.(a+2r)+3a^{2|r}.b^{1|r}(b+r)$$
$$+3a^{1|r}.b^{2|r}(a+r)+3a^{1|r}.b^{2|r}(b+2r)$$
$$+b^{3|r}.a+b^{3|r}.(b+3r)$$
$$= a^{4|r}+4a^{3|r}.b^{1|r}+6.a^{2|r}.b^{2|r}+4a^{1|r}.b^{3|r}+b^{4|r}$$

Die Vorzahlen dieser Producte stimmen vollkommen mit den Vorzahlen des Binomiums überein, so dafs

307) $(a+b)^{n|r} = a^{n|r}+k(n,2).a^{n-1|r}.b^{1|r}+k(n,3).a^{n-2|r}.b^{2|r}+\ldots+k(n,n+1).a^{0|r}b^{n|r}$

Der Uebergang vom vorhergehenden zum folgenden Gliede $(a+b)^{n+1|r}$ besteht in dem Zerlegen des neuen hinzugetretenen Factors $a+b+nr$ auf $n+1$ verschiedene Arten, und im Vervielfachen

des Products $a^{n|r}$ mit $a+nr$ und b
$k(n,2)a^{n-1|r}.b^{1|r}$ mit $a+nr-r$ und $b+r$
$k(n,3)a^{n-2|r}.b^{2|r}$ mit $a+nr-2r$ und $b+2r$
. . . . . .
$k(n,p+1).a^{n-p|r}.b^{p|r}$ mit $a+nr-pr$ und $b+pr$
. . . . . .

und im Vereinigen der zusammen gehörigen Producte, sämmtlich begriffen in folgenden

$$k(n,p+1).a^{n-p|r}.b^{p|r}(b+pr)+k(n,p+2).a^{n-p-1|r}.b^{p+1|r}.(a+nr-pr-r) =$$
$$= [k(n,p+1)+k(n,p+2)]\, a^{n-p|r}.b^{p+1|r} = k(n+1,p+2).a^{n-p|r}.b^{p+1|r}$$

Setzen wir nun $p = 0,1,2,3,\ldots$, so entsteht die Reihe

$(a+b)^{n+1|r} = a^{n+1|r}+k(n+1,2).a^{n|r}.b^{1|r}+k(n+1,3).a^{n-1|r}.b^{2|r} + \ldots$

welche auf gleiche Art, als die vorige, gebildet ist.

§. 99.

Bei dem Vervielfachen wurde der neue Factor auch jedesmal verändert, wenn er einem neuen Producte zugesellet werden sollte. Eine ähnliche Veränderung findet auch bei dem Messen statt. Indem wir 1 durch a+b—r messen, messen wir zuerst durch (a—r)+b, den Rest durch (a—2r)+(b+r), den neuen Rest durch (a—3r)+(b+2r), u. s. w.; von a wird immer ein r mehr abgezählt und dem b zugezählt, so, dafs immer der Werth des Maasses a+b—r unverändert bleibt. Zum Geschäfte selbst:

1 durch (a—r)+b gemessen, giebt $\frac{1}{a-r}$

der Rest $\frac{-b}{a-r}$ durch (a—2r)+(b+r) giebt $\frac{-b}{(a-r)(a-2r)}$

. . $\frac{+b(b+r)}{(a-r)(a-2r)}$ durch (a—3r)+(b+2r) giebt $\frac{+b(b+r)}{(a-r)(a-2r)(a-3r)}$

. . . $\frac{-b(b+r)(b+2r)}{(a-r)(a-2r)(a-3r)}$ durch (a—4r)+(b+3r)

giebt $\frac{-b(b+r)(b+2r)}{(a-r)(a-2r)(a-3r)(a-4r)}$

. . . $\frac{+b(b+r)(b+2r)(b+3r)}{(a-r)(a-2r)(a-3r)(a-4r)}$ durch (a—5r)+(b+4r)

giebt $\frac{+b(b+r)(b+2r)(b+3r)}{(a-r)(a-2r)(a-3r)(a-4r)(a-5r)}$

u. s. w. Es ist also

308) $\frac{1}{a+b-r} = (a+b)^{-1|r} = a^{-1|r} - a^{-2|r}.b^{1|r} + a^{-3|r}.b^{2|r} - a^{-4|r}.b^{3|r} + \ldots$

$\ldots (-)^{p-1}a^{-p|r}b^{p-1|r} + \ldots$

Indem wir von $(a+b)^{-1|r}$ zu $(a+b)^{-2|r}$ übergehen, messen wir die vorstehende Gleichung durch $a+b-2r$, und machen mit diesem Maasse ähnliche Veränderungen, wie vorhin, nämlich

$$(a+b)^{-2|r} = \frac{(a+b)^{-1|r}}{a+b-2r} = \frac{a^{-1|r}}{a-2r+b} - \frac{a^{-2|r}.b^{1|r}}{a-3r+b+r} + \frac{a^{-3|r}.b^{2|r}}{a-4r+b+2r} - \ldots$$
$$(-)^{p-1} \cdot \frac{a^{-p|r} \cdot b^{p-1|r}}{a-pr-r+b+pr-r} + \ldots.$$

Setzen wir nun in der obigen Gleichung 308, $a-pr$ statt a und $b+pr-r$ statt b, so wird

$$\frac{1}{a-pr+b+pr-2r} = (a-pr)^{-1|r} - (a-pr)^{-2|r} \cdot (b+pr-r)^{1|r} +$$
$$+ (a-pr)^{-3|r} \cdot (b+pr-r)^{2|r} - \ldots.$$

und also

$$\frac{a^{-p|r}b^{p-1|r}}{a-pr+b+pr-2r} = a^{-p-1|r}.b^{p-1|r} - a^{-p-2|r}.b^{p|r} + a^{-p-3|r}.b^{p+1|r} -$$
$$- a^{-p-4|r}b^{p+2|r} + \ldots.$$

Wenn wir, wie es die obige Gleichung erfordert, $p = 1,2,3, \ldots$ setzen, so geht sie in folgende über

$$(a+b)^{-2|r} = a^{-2|r}.b^{0|r} - a^{-3|r}.b^{1|r} + a^{-4|r}.b^{2|r} - a^{-5|r}.b^{3|r} + \ldots.$$
$$- a^{-3|r}.b^{1|r} + a^{-4|r}.b^{2|r} - a^{-5|r}.b^{3|r} + \ldots.$$
$$+ a^{-4|r}.b^{2|r} - a^{-5|r}.b^{3|r} + \ldots.$$
$$- a^{-5|r}.b^{3|r} + \ldots.$$
$$+ \ldots.$$

oder

309) $(a+b)^{-2|r} = a^{-2|r}.b^{0|r} - 2.a^{-3|r}.b^{1|r} + 3.a^{-4|r}.b^{2|r} - 4a^{-5|r}.b^{3|r} + \ldots$
$= k(-2,1).a^{-2|r}.b^{0|r} + k(-2,2).a^{-3|r}.b^{1|r} + k(-2,3).a^{-4|r}.b^{2|r} + \ldots$

Wir messen diese Reihe durch $a+b-3r$, setzen $a = a-pr$ und $b = b+pr-2r$, wodurch 308 in folgende übergeht

$$\frac{a^{-p|r}.b^{p-2|r}}{a-pr+b+pr-3r} = a^{p,r}.b^{p-2|r}.[(a-pr)^{-1|r} - (a-pr)^{-2|r}.(b+pr-2r)^{1|r} + \ldots]$$

$$= a^{-p-1|r}.b^{p-2|r} - a^{-p-2|r}.b^{p-1|r} - a^{-p-3|r}.b^{p|r} + \ldots\ldots \quad (\alpha$$

und setzen hierin p = 2,3,4, ... Hierdurch erhalten wir folgende Gleichung:

$$(a+b)^{-3|r} = k(-2,1)a^{-3|r}.b^{0|r} - k(-2,1)\left|\begin{matrix} a^{-4|r}.b^{1|r} \\ +k(-2,2) \end{matrix}\right. + k(-2,1)\left|\begin{matrix} a^{-5|r}.b^{2|r} \\ -k(-2,2) \\ +k(-2,3) \end{matrix}\right. -$$

$$-k(-2,1)\left|\begin{matrix} a^{-6|r}.b^{3|r} \\ +k(-2,2) \\ -k(-2,3) \\ +k(-2,4) \end{matrix}\right. + \ldots\ldots$$

Die Vorzahlen in dieser Reihe lassen sich sehr vereinfachen, denn

$$k(-m,1) - k(-m,2) = 1 + \frac{m}{1} = -k(-m-1,2)$$

$$k(-m,1) - k(-m,2) + k(-m,3) = -k(-m-1,2) + k(-m,3) =$$

$$= -k(-m-1,2)\,(1+\frac{m}{2}) = k(-m-1,2).\frac{-m-2}{2} = +k(-m-1,3)$$

$$k(-m,1) - k(-m,2) + k(-m,3) - k(-m,4) = k(-m-1,3) - k(-m,4) =$$

$$= k(-m-1,3).(1+\frac{m}{3}) = -k(-m-1,3).\frac{-m-3}{3} = -k(-m-1,4)$$

Auf gleiche Weise wird das folgende Product k(—m,5) mit den vorigen vereinigt. Ueberhaupt ist

$$k(-m,1) - k(-m,2) + \ldots\ldots (-)^{q-1}k(-m,q) = (-)^{q-1}.k(-m-1,q)$$

gefunden, so ist auch

$$k(-m,1) - k(-m,2) + \ldots (-)^{q}k(-m,q+1) = (-)^{q-1}k(-m-1,q) + (-)^{q}k(-m,q+1) =$$

$$= (-)^{q-1}k(-m-1,q).(1+\frac{m}{q}) = (-)^{q}.k(-m-1,q).\frac{-m-q}{q} =$$

$$= (-)^{q}.k(-m-1,q+1) \ldots\ldots (\beta$$

Setzen wir nun $m = -2$ und $q = 1,2,3,\ldots$ so geht die obige Reihe in folgende über

310) $(a+b)^{-3|r} = k(-3,1)a^{-3.r}.b^{0|r} + k(-3,2).a^{-4|r}.b^{1|r} + k(-3,3).a^{-5|r}.b^{2|r} + \ldots$

So wie wir von $(a+b)^{-2|r}$ zu $(a+b)^{-3|r}$ gekommen sind, eben so gelangen wir auch überhaupt von jedem vorhergehenden zum folgenden Producte. Um nämlich von $(a+b)^{-(n-1)|r}$ zu $(a+b)^{-n|r}$ überzugehen, messen wir die Gleichung

$$(a+b)^{-(n-1)|r} = k(-n+1,1).a^{-n+1|r}b^{0|r} + k(-n+1,2).a^{-n|r}b^{1|r} + + k(-n+1,3).a^{-n-1|r}b^{2|r} + \ldots.$$

durch $a+b-nr$, machen sowohl von der Gleichung α als auch von β Anwendung und erhalten zuerst folgende Gleichung

$$(a+b)^{-n|r} = k(-n+1,1)a^{-n|r}b^{0|r} - k(-n+1,1)\,|\,a^{-n-1|r}b^{1|r} + + k(-n+1,2)\,|\,$$
$$+ k(-n+1,1)\,|\,a^{-n-2|r}b^{2|r} - \ldots.$$
$$- k(-n+1,2)\,|\,$$
$$+ k(-n+1,3)\,|\,$$

und zuletzt die Gleichung

311) $(a+b)^{-n|r} = k(-n,1).a^{-n|r}b^{0|r} + k(-n,2).a^{-n-1|r}b^{1|r} + k(-n,3).a^{-n-2|r}b^{2|r} + \ldots$

Diese Reihe geht ins Unendliche fort, und bricht nur dann ab, wenn b ein Vielfaches von $(-r)$ ist; sie ist denselben Gesetzen unterworfen, als die Reihe 307, in welcher n bejahet ist, und wird auf eine ähnliche Weise gebildet, als die Reihe für das Binomium. Es ist also ganz allgemein für jedes n

312) $(a+b)^{n|r} = k(n,1)a^{n|r}b^{0|r} + k(n,2)a^{n-1|r}b^{1|r} + \ldots + k(n,p+1)a^{n-p|r}b^{p|r} + \ldots$

§. 100.

Diese Reihe, deren Allgemeinheit wir so eben gefunden haben, kann

verschiedene Gestalten annehmen. Messen wir zuerst die Reihe durch $a^{n|r}$, so geht sie über in

$$313)\quad \frac{(a+b)^{n|r}}{a^{n|r}} = 1 + \frac{k(n,2).b^{1|r}}{(a+nr-r)^{1|-r}} + \frac{k(n,3).b^{2|r}}{(a+nr-r)^{2|-r}} + \frac{k(n,4).b^{3|r}}{(a+nr-r)^{3|-r}} + \cdots$$

Setzen wir hierin $a-(n-1)r$ statt a, so wird

$$314)\quad \frac{(a+b)^{n|-r}}{a^{n|-r}} = 1 + \frac{k(n,2).b^{1|r}}{a^{1|-r}} + \frac{k(n,3).b^{2|r}}{a^{2|-r}} + \frac{k(n,4).b^{3|r}}{a^{3|-r}} + \cdots$$

Setzen wir in dieser Gleichung $-b$ statt b, so wird

$$315)\quad \frac{(a-b)^{n|-r}}{a^{n|-r}} = 1 - \frac{k(n,2).b^{1|-r}}{a^{1|-r}} + \frac{k(n,3).b^{2|-r}}{a^{2|-r}} - \frac{k(n,4).b^{3|-r}}{a^{3|-r}} + \cdots$$

Setzen wir in 314 $-r$ statt r, so wird

$$316)\quad \frac{(a+b)^{n|r}}{a^{n|r}} = 1 + \frac{k(n,2)b^{1|-r}}{a^{1|r}} + \frac{k(n,3).b^{2|-r}}{a^{2|r}} + \frac{k(n,4).b^{3|-r}}{a^{3|r}} + \cdots$$

und setzen wir in 314 $-b$ statt b und $-r$ statt r, so wird

$$317)\quad \frac{(a-b)^{n|r}}{a^{n|r}} = 1 - \frac{k(n,2).b^{1|r}}{a^{1|r}} + \frac{k(n,3).b^{2|r}}{a^{2|r}} - \frac{k(n,4).b^{3|r}}{a^{3|r}} + \cdots$$

Es ist noch übrig, in diesen vier Gleichungen $-n$ statt n zu setzen; hierdurch geht 314 über in

$$318)\quad \frac{(a+r)^{n|r}}{(a+b+r)^{n|r}} = 1 + \frac{k(-n,2)b^{1|r}}{a^{1|-r}} + \frac{k(-n,3).b^{2|r}}{a^{2|-r}} + \frac{k(-n,4).b^{3|r}}{a^{3|-r}} + \cdots$$

315 in

$$319)\quad \frac{(a+r)^{n|r}}{(a-b+r)^{n|r}} = 1 - \frac{k(-n,2).b^{1|-r}}{a^{1|-r}} + \frac{k(-n,3).b^{2|-r}}{a^{2|-r}} - \frac{k(-n,4).b^{3|-r}}{a^{3|-r}} + \cdots$$

316 in

$$320)\quad \frac{(a-r)^{n|-r}}{(a+b-r)^{n|-r}} = 1 + \frac{k(-n,2).b^{1|-r}}{a^{1|r}} + \frac{k(-n,3).b^{2|-r}}{a^{2|r}} + \frac{k(-n,4).b^{3|-r}}{a^{3|r}} + \cdots$$

und 317 in

$$321)\quad \frac{(a-r)^{n|-r}}{(a-b-r)^{n|-r}} = 1 - \frac{k(-n,2).b^{1|r}}{a^{1|r}} + \frac{k(-n,3).b^{2|r}}{a^{2|r}} - \frac{k(-n,4).b^{3|r}}{a^{3|r}} + \cdots$$

§. 101.

Zu diesen verschiedenen Gestalten, in welchen die ursprüugliche Reihe erscheinen kann, wollen wir noch einige besondere Fälle gesellen, die Aufmerksamkeit verdienen. Wir setzen in 313 $a = -r$ und $n = -n$, und erhalten die Reihe

322) $$\frac{(-r)^n.1^{n-1|1}}{(b-2r)^{n|-r}} = \frac{b^{0|r}}{n(n+1).r^0.1^{0|1}} + \frac{b^{1|r}}{(n+1)(n+2).r^1.1^{1|1}} + \frac{b^{2|r}}{(n+2)(n+3).r^2.1^{2|1}} + \frac{b^{3|r}}{(n+3)(n+4).r^3.1^{3|1}} + \ldots.$$

in 313 $a = o$ und $n = -n$

323) $$\frac{(-r)^n.1^{n-1|1}}{(b-r)^{n|-r}} = \frac{b^{0|r}}{n.r^0.1^{0|1}} + \frac{b^{1|r}}{(n+1)r^1.1^{1|1}} + \frac{b^{2|r}}{(n+2)r^2.1^{2|1}} + \frac{b^{3|r}}{(n+3).r^3.1^{3|1}} + \ldots$$

in 322 und 323 $r = -1$,

324) $$\frac{1^{n-1|1}}{(b+2)^{n|1}} = \frac{k(b,1)}{n(n+1)} - \frac{k(b,2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{k(b,3)}{(n+2)(n+3)} - \frac{k(b,4)}{(n+3)(n+4)} + \ldots..$$

und

325) $$\frac{1^{n-1|1}}{(b+1)^{n|1}} = \frac{k(b,1)}{n} - \frac{k(b,2)}{n+1} + \frac{k(b,3)}{n+2} - \frac{k(b,4)}{n+3} + \ldots - \ldots$$

Ist $b = n = r = 1$, so wird aus 322

326) $$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} \ldots.$$

welches auch seyn mufs, denn diese Reihe ist aus den beiden Reihen

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$
$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \ldots.$$

zusammengesetzt.

Wird $a = r = 1$ gesetzt, so geht 313 über in

327) $$\frac{(b+1)^{n|1}}{1^{n|1}} = 1 + \frac{b^{1|1}}{1^{1|1}} + \frac{b^{2|1}}{1^{2|1}} + \ldots + \frac{b^{n|1}}{1^{n|1}}$$

und 316 in

328) $$\frac{(b+1)^{n|1}}{1^{n|1}} = 1+k(n,2).k(b,2)+k(n,3).k(b,3)+k(n,4).k(b,4) + \ldots.$$

Ist nun $b = n$, so wird

329) $$\frac{(n+1)^{n|1}}{1^{n|1}} = [k(n,1)]^2 + [k(n,2)]^2 + [k(n,3)]^2 + [k(n,4)]^2 + \ldots$$

Wird $b = r = 1$ gesetzt, so wird aus 318

330) $$\frac{a+1}{a+1+n} = 1-\frac{n}{a}+\frac{n(n+1)}{a(a-1)} - \frac{n(n+1)(n+2)}{a(a-1)(a-2)} + \ldots.$$

Ist $b = -a+r$, so geht 312 über in

331) $$r^{n|r} = a^{n|r}-k(n,2)(a-r)^{n|r}+k(n,3).(a-2r)^{n|r}-k(n,4).(a-3r)^{n|r}+\ldots.$$

§. 102.

Es ist

$$\frac{(a-n)^{n|1}}{a^{n|1}} = (1-\frac{n}{a})(1-\frac{n}{a+1})(1-\frac{n}{a+2}) \ldots (1-\frac{n}{a+n-1})$$

und

$$\frac{(a-n)^{n|1}}{a^{n|1}} = \frac{(a+n)^{-n|1}}{a^{-n,1}}$$

Setzen wir nun zuerst $b = -n$, $r = 1$ in 313

dann $b = n$, $n = -n$, $r = 1$ in 313

und zuletzt $b = n$, $r = 1$ in 317,

so erhalten wir für vorstehendes Product folgende drei verschiedene Reihen

332) $$\frac{(a-n)^{n|1}}{a^{n|1}} = 1-\frac{n^2}{1.(a+n-1)} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.(a+n-1)(a+n-2)}$$
$$- \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.(a+n-1)(a+n-2)(a+n-3)} + \ldots - \ldots$$

$$333) \quad = 1 - \frac{n^2}{1.(a-n-1)} + \frac{n^2(n+1)^2}{1.2.(a-n-1)(a-n-2)}$$

$$- \frac{n^2(n+1)^2(n+2)^2}{1.2.3.(a-n-1)(a-n-2)(a-n-3)} + \ldots - \ldots$$

$$334) \quad = 1 - \frac{n^2}{1.a} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.a(a+1)} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1.2.3.a(a+1)(a+2)} + \ldots - \ldots$$

Ferner ist

$$a^2(a^2-1^2)(a^2-2^2)(a^2-3^2)\ldots[a^2-(n-1)^2] = a \,.\, (a+n-1)^{2n-1|-1}$$

und

$$(a+n-1)^{2n-1|-1} = a^{2n-1|-1}+k(2n-1,2)a^{2n-2|-1}(n-1)^{1|-1} +$$
$$+ k(2n-1,3).a^{2n-3|-1}(n-1)^{2|-1} + \ldots.$$

Vervielfachen wir diese Reihe mit a, so wie es das vorgelegte Product erfordert, bemerken hierbei, dafs

$$a.a^{2n-p|-1} = a^{2n-p+1|-1}+(2n-p).a^{2n-p|-1}$$

so wie auch, dafs

$$k(2n-1,p).(n-1)^{p-1|-1}.(2n-p)+k(2n-1,p+1).(n-1)^{p|-1}=k(2n-1,p+1).n^{p|-1}$$

ist, so gewinnen wir für das obige Product folgende Reihe

$$335) \quad a^2(a^2-1^2)(a^2-2^2)\ldots[a^2-(n-1)^2] =$$

$$= a^{2n|-1}+k(2n-1,2).n^{1|-1}.a^{2n-1|-1}+k(2n-1,3).n^{2|-1}a^{2n-2|-1}$$
$$+ k(2n-1,4).n^{3|-1}.a^{2n-3|-1} + \ldots.$$

und da $-a$ statt $+a$ das erstere Product nicht stört

$$= a^{2n|1}-k(2n-1,2).n^{1|-1}a^{2n-1|1}+k(n-1,3).n^{2|-1}a^{2n-2|1} - \ldots + \ldots$$

Entwicklung von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von n.

$$a^{n|r} = \gamma(a,r,0).n^0+\gamma(a,r,1).n^1+\gamma(a,r,2).n^2+\gamma(a,r,3).n^3 + \ldots.$$

§. 103.

So wie früher a^n, so läfst sich auch jetzt $a^{n|r}$ in eine Reihe nach den Potenzen von n entwickeln. Letztere Aufgabe ist nur mit mehreren Schwierigkeiten als erstere verbunden. Vorerst führen wir sie auf einfachere Fälle zurück, indem wir die Grundzahl a und den gemeinsamen Unterschied r verändern; es ist nach 270

$$a^{n|r} = \left\{\frac{r}{h}\right\}^n \cdot \left\{\frac{ha}{r}\right\}^{n:h}$$

Setzen wir nun

$$\left\{\frac{r}{h}\right\}^n = 1 + \frac{\left\{l:\frac{r}{h}\right\}^1}{1}.n^1+\frac{\left\{l:\frac{r}{h}\right\}^2}{1\,.\,2}.n^2+\frac{\left\{l:\frac{r}{h}\right\}^3}{1.2.3}.n^3 + \ldots.$$

und

$$\left\{\frac{ha}{r}\right\}^{n|h} = \gamma(\frac{ha}{r},h,0)+\gamma(\frac{ha}{r},h,1).n^1+\gamma(\frac{ha}{r},h,2).n^2 + \ldots$$

vervielfachen diese Reihen und setzen die Vorzahlen gleichhoher Potenzen von n gleich, so erhalten wir folgende Gleichungen

336) $\gamma(a,r,0) = \gamma(\frac{ha}{r},h,0)$

$$\gamma(a,r,1) = \gamma(\frac{ha}{r},h,1) + \frac{\gamma(\frac{ha}{r},h,0).(l:\frac{r}{h})^1}{1}$$

$$\gamma(a,r,2) = \gamma(\frac{ha}{r},h,2)+\frac{\gamma(\frac{ha}{r},h,1).(l:\frac{r}{h})^1}{1}+\frac{\gamma(\frac{ha}{r},h,0).(l:\frac{r}{h})^2}{1\,.\,2}$$

. . . . . .

$$\gamma(a,r,m)=\gamma(\frac{ha}{r},h,m)+\frac{\gamma(\frac{ha}{r},h,m-1).(l:\frac{r}{h})^1}{1}+\ldots+\frac{\gamma(\frac{ha}{r},h,o).(l:\frac{r}{h})^m}{1.2.3\ldots m}$$

Hier ist h ganz willkürlich; setzen wir $h = 1$, so ist

337) $$\gamma(a,r,m)=\gamma(\frac{a}{r},1,m)+\frac{\gamma(\frac{a}{r},1,m-1).(l:r)^1}{1}+\ldots+\frac{\gamma(\frac{a}{r},1,o)(l:r)^m}{1.2\ldots m}$$

Wird $h = \frac{r}{a}$ angenommen, so ist

338) $$\gamma(a,r,m)=\gamma(1,\frac{r}{a},m)+\frac{\gamma(1,\frac{r}{a},m-1).(l:a)^1}{1}+\ldots+\frac{\gamma(1,\frac{r}{a},o).(l:a)^m}{1.2\ldots m}$$

§. 104.

Die letzte Gleichung 338 weiset den allgemeinen Fall $a^{n|r}$ auf den einfachen Fall $1^{n|r}$ zurück, wodurch unsere Aufgabe sehr vereinfacht ist. Diese einfachere Aufgabe lösen wir auf dieselbe Weise, wie eine frühere ihr ganz verwandte, §. 27. Wir entwickeln die Glieder $\alpha(n,1)$, $\alpha(n,2)$, $\alpha(n,3)$, ... der Reihe

$$1^{n|r} = 1+\alpha(n,1).r^1+\alpha(n,2).r^2+\alpha(n,3).r^3+\ldots.$$

nach den Potenzen von n, und wählen hierzu die Gleichungen 288; wir erhalten folgende Reihe

339)
$$\begin{aligned}1^{n|r} = 1\\ &+[\beta(1,1).r^1+\beta(2,1).r^2+\beta(3,1).r^3+\beta(4,1).r^4+\ldots].n^1\\ &+[\beta(1,2).r^1+\beta(2,2).r^2+\beta(3,2).r^3+\beta(4,2).r^4+\ldots].n^2\\ &+[\beta(2,3).r^2+\beta(3,3).r^3+\beta(4,3).r^4+\beta(5,3).r^5+\ldots].n^3\\ &+[\beta(2,4).r^2+\beta(3,4).r^3+\beta(4,4).r^4+\beta(5,4).r^5+\ldots].n^4\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Die Vorzahlen der Reihe

$$1^{n|r} = \gamma(1,r,0)+\gamma(1,r,1).n^1+\gamma(1,r,2).n^2+ \ldots .$$

befolgen also folgendes Gesetz

340) $$\gamma(1,r,2m-1)=\beta(m,2m-1).r^m+\beta(m+1,2m-1).r^{m+1}+ \\ +\beta(m+2,2m-1).r^{m+2}+ \ldots$$

und

$$\gamma(1,r,2m)=\beta(m,2m).r^m+\beta(m+1,2m).r^{m+1}+\beta(m+2,2m).r^{m+2}+ \ldots .$$

Die Vorzahl von n^1 nämlich $\gamma(1,r,1)$ können wir nach 291 durch Glieder eines früheren Polynomiums darstellen; es ist

$$\gamma(1,r,1) = \beta(1,1)r^1+\beta(2,1)r^2+\beta(3,1)r^3+\beta(4,1)r^4+ \ldots .$$

und also

341) $$\gamma(1,r,1)=1^{0|1}.E^{-1}v2.r^1-1^{1|1}.E^{-1}v3.r^2-1^{3|1}.E^{-1}v5.r^4-1^{5|1}.E^{-1}v7.r^6- \ldots$$

§. 105.

Es ist noch übrig, die Vorzahlen von n^2, n^3, n^4, ... auf die erste Vorzahl zurückzuführen. Wir wählen hierzu die Gleichung

$$1^{m+n|r} = 1^{m|r}.(1+mr)^{n|r}$$

welche für jedes m und n statt findet, entwickeln zuerst das ungetrennte Product $1^{m+n|r}$ nach den Potenzen von n

$$1^{m+n\ r} = 1+\gamma(1,r,1).(m+n)^1+\gamma(1,r,2).(m+n)^2+ \ldots . \\ = 1+\gamma(1,r,1).m^1+\gamma(1,r,2).m^2+\gamma(1,r,3).m^3+ \ldots . \\ +[1.\gamma(1,r,1)+2\gamma(1,r,2).m^1+3.\gamma(1,r,3).m^2+ \ldots .]\cdot\frac{n^1}{1} \\ +[1.2.\gamma(1,r,2)+2.3.\gamma(1,r,3).m^1+3.4.\gamma(1,r,4).m^2+ \ldots .]\cdot\frac{n^2}{1.2} \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

dann auch das zweite Product

$$1^{m|r}.(1+mr)^{n|r} = 1^{m|r}\,[1+\gamma(1+mr,r,1).n^1+\gamma(1+mr,r,2).n^2 + \ldots.]$$

und erhalten durch Gleichsetzung der Vorzahlen gleichhoher Potenzen von n folgende allgemeine Gleichung

342) $$1^{p|1}.1^{m|r}.\gamma(1+mr,r,p) = 1^{p|r}.\gamma(1,r,p)+2^{p|r}.\gamma(1,r,p+1).m^1 + 3^{p|r}.\gamma(1,r,p+2).m^2 + \ldots.$$

Zu unserm Zwecke reicht es hin, den einfachsten Fall von dieser Gleichung, nämlich $p = 1$ anzunehmen und dann von der Gleichung

$$1^{m|r}.\gamma(1+mr,r,1)=1.\gamma(1,r,1)+2.\gamma(1,r,2).m^1+3.\gamma(1,r,3).m^2 + \ldots.$$

den ersten Theil $1^{m|r}.\gamma(1+mr,r,1)$ nach den Potenzen von m zu entwickeln; wir setzen deshalb

$$1^{m|r} = 1 + \gamma(1,r,1).m^1 + \gamma(1,r,2).m^2 + \ldots.$$

und nach 338

$$\gamma(1+mr,r,1) = \gamma(1,\frac{r}{1+mr},1) + \lg(1+mr)$$

$$= \lg(1+mr)+\beta(1,1).r^1.(1+mr)^{-1}+\beta(2,1).r^2(1+mr)^{-2}+\beta(3,1)r^3(1+mr)^{-3}+\ldots.$$

$$= u_o + u_1 m^1 + u_2 m^2 + u_3 m^3 + \ldots.$$

wo

$$u_o = \beta(1,1)r^1 + \beta(2,1)r^2 + \beta(3,1)r^3 + \ldots. = \gamma(1,r,1)$$

und

$$u_p = (-)^{p-1}.\frac{r^p}{p}+(-)^p.\frac{1}{1^{p|1}}[1^{p|1}\beta(1,1)r^{p+1}+2^{p|1}.\beta(2,1)r^{p+2} + 3^{p|1}\beta(3,1)r^{p+3} + 4^{p|1}\beta(4,1)r^{p+4} + \ldots.]$$

$$=(-)^{p-1}[\frac{r^p}{p} - E^{-1}v2.r^{p+1}+(p+1)^{1|1}E^{-1}v3.r^{p+2}-(p+1)^{2|1}E^{-1}v4.r^{p+3} + (p+1)^{3|1}.E^{-1}v5.r^{p+4} - \ldots + \ldots]$$

ist, und vervielfachen diese Reihen für $1^{m|r}$ und $\gamma(1+mr,r,1)$ miteinander. Wir erhalten durch Gleichsetzung der Vorzahlen gleichhoher Potenzen von m folgende Gleichungen

343) $1.\gamma(1,r,1) = u_0$

$2.\gamma(1,r,2) = u_0.\gamma(1,r,1)+u_1$

$3.\gamma(1,r,3) = u_0.\gamma(1,r,2)+u_1.\gamma(1,r,1)+u_2$

. . . . . .

$p.\gamma(1,r,p) = u_0.\gamma(1,r,p-1)+u_1.\gamma(1,r,p-2) + \ldots + u_p.\gamma(1,r,0)$

Diese Gleichungen enthalten die zurücklaufende Bildungsweise der vorgegebenen Reihe. Die unabhängige Bildungsweise ergiebt sich durch das Vervielfachen; wir erhalten z. B. aus der zweiten Gleichung

$$2\gamma(1,r,2) = u_0.\gamma(1,r,1) + u_1$$

folgende Reihe

344) $$2.\gamma(1,r,2) = r^1+\beta(1,1)\beta(1,1)\,r^2-3\beta(2,1)r^3+\beta(2,1)\beta(2,1)r^4 - \beta(1,1)$$
$$-5\beta(4,1)r^5+\beta(2,1)\beta(4,1)r^6-7\beta(6,1)r^7+\beta(2,1)\beta(6,1)r^8 - \ldots$$
$$+\beta(4,1)\beta(2,1) \qquad \beta(4,1)\beta(4,1)$$
$$\beta(6,1)\beta(2,1)$$

so dafs

345) $$2.\beta(1,2) = 1$$
$$2.\beta(3,2) = -3\beta'2,1)$$
$$2.\beta(5,2) = -5\beta(4,1)$$
$$2.\beta(7,2) = -7\beta(6,1)$$
. . . . . .
$$2.\beta(2m+1,2) = -(2m+1)\beta(2m,1)$$

oder

346) $$4.1.\beta(3,2) = 1^{3|1}.E^{-1}v3$$
$$4.2.\beta(5,2) = 1^{5|1}.E^{-1}v5$$
$$4.3.\beta(7,2) = 1^{7|1}.E-^{1}v7$$
. . . . . .
$$4.m.\beta(2m+1,2) = 1^{2m+1|1}.E-^{1}v(2m+1)$$

und

347) $$2\beta(2,2) = \beta(1,1)\beta(1,1) - \beta(1,1)$$
$$2\beta(4,2) = \beta(2,1)\beta(2,1)$$
$$2\beta(6,2) = \beta(2,1)\beta(4,1) + \beta(4,1)\beta(2,1)$$
$$2\beta(8,2) = \beta(2,1)\beta(6,1) + \beta(4,1)\beta(4,1) + \beta(6,1)\beta(2,1)$$
. . . . . .

Entwicklung des Logarithmen von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von n.

$$\lg a^{n|r} = \mu(a,r,1).n^1+\mu(a,r,2).n^2+\mu(a,r,3).n^3 + \ldots$$

§. 106.

Die unabhängige Bildungsweise dieser Reihe erhalten wir aus 64, nämlich

348)
$$\mu(a,r,m) = \tfrac{1}{1}k(m,2).V^1v(m+1)-\tfrac{1}{2}k(m,3).V^2v(m+1)$$
$$+ \tfrac{1}{3}k(m,4).V^3v(m+1)- \ldots (-)^{m-1}.\tfrac{1}{m}.k(m,m+1).V^mv(m+1)$$

wo

$$V = 1+\gamma(a,r,1).n^1+\gamma(a,r,2).n^2 + \ldots\ldots$$

ist, und die zurücklaufende aus 58

349)
$$(m+1).\gamma(a,r,m+1) = (m+1)\mu(a,r,m+1).\gamma(a,r,0)$$
$$+ m.\mu(a,r,m).\gamma(a,r,1) + \ldots + 1.\mu(a,r,1).\gamma(a,r,m)$$

Diese zurücklaufende führt zu einer zweiten unabhängigen Bildungsweise. Setzen wir nämlich $a = 1$ und $m = 0$, so finden wir, dafs nach 343

$$1.\mu(1,r,1) = 1.\gamma(1,r,1) = u_0$$

Wird $m = 1$ gesetzt

$$2\gamma(1,r,2) = 2.\mu(1,r,2)+1.\mu(1,r,1).\gamma(1,r,1)$$
$$= 2.\mu(1,r,2)+u_0.\gamma(1,r,1)$$

und diese Gleichung mit einer früheren

$$2\gamma(1,r,2) = u_1 + u_0.\gamma(1,r,1)$$

verbunden, so entsteht die Gleichung

$$2.\mu(1,r,2) = u_1$$

Durch Annahme von m = 2 entsteht die Gleichung

$$3\gamma(1,r,3) = 3\mu(1,r,3)+2\mu(1,r,2).\gamma(1,r,1)+\mu(1,r,1).\gamma(1,r,2)$$
$$= 3\mu(1,r,3)+u_1.\gamma(1,r,1)+u_0.\gamma(1,r,2)$$

die mit einer früheren 343

$$3\gamma(1,r,3) = u_2 + u_1.\gamma(1,r,1) + u_0.\gamma(1,r,2)$$

in Verbindung folgende erzeugt

$$3.\mu(1,r,3) = u_2$$

Dieses Einführen der gefundenen Werthe in die folgende Gleichung und das Verbinden mit einer früheren Gleichung 343, kehrt immer in derselben Ordnung wieder zurück. Ist einmal

$$m.\mu(1,r,m) = u_{m-1}$$

gefunden, so entsteht durch Einführung der schon gefundenen Werthe in die Gleichung 349 folgende

$$(m+1)\gamma(1,r,m+1) = (m+1)\mu(1,r,m+1)+u_{m-1}.\gamma(1,r,1)+u_{m-2}.\gamma(1,r,2) + \ldots$$
$$\ldots + u_0.\gamma(1,r,m)$$

die mit der Gleichung

$$m\gamma(1,r,m) = u_m+u_{m-r}.\gamma(1,r,1) + \ldots + u_0.\gamma(1,r,m)$$

verbunden, zu dem folgenden Werthe führt

350) $$m.(m+1).\mu(1,r,m+1) = m.u_m$$
$$= (-)^{m-1}(r^m - m^{1|1}.E^{-1}v2.r^{m+1} + m^{2|1}.E^{-1}v3.r^{m+2} - m^{3|1}.E^{-1}v4.r^{m+3} + \ldots)$$

§. 107.

Bei dieser unabhängigen Bildungsweise liegt die Grundgrösse a = 1 zum Grunde; wir können solche auf jede Grundgrösse auf folgende Weise ausdehnen. Es ist

$$a^{n|r} = \left\{\frac{r}{h}\right\}^n . \left\{\frac{ha}{r}\right\}^{n|h}$$

also

$$\lg a^{n|r} = n.\lg\frac{r}{h} + \lg\left\{\frac{ha}{r}\right\}^{n|h} =$$

$$= [\lg\frac{r}{h}+\mu(\frac{ha}{r},h,1)].n^1+\mu(\frac{ha}{r},h,2).n^2+\mu(\frac{ha}{r},h,3).n^3 + \cdots$$

Vergleichen wir diese Reihe mit der ursprünglichen

$$\lg a^{n|r} = \mu(a,r,1).n^1+\mu(a,r,2).n^2+\mu(a,r,3).n^3 + \cdots$$

so erhalten wir folgende Gleichungen

351)
$$\mu(a,r,1) = \lg\frac{r}{h}+\mu(\frac{ha}{r},h,1)$$

$$\mu(a,r,2) = \mu(\frac{ha}{r},h,2)$$

$$\mu(a,r,3) = \mu(\frac{ha}{r},h,3)$$

. . . . . .

worin h eine ganz willkürliche Grösse ist; setzen wir $h = \frac{r}{a}$, so erhalten wir die Gleichungen

352)
$$\mu(a,r,1) = \lg a+\mu(1,\frac{r}{a},1)$$

$$\mu(a,r,2) = \mu(1,\frac{r}{a},2)$$

$$\mu(a,r,3) = \mu(1,\frac{r}{a},3)$$

. . . . . .

welche die Gleichung 350 verallgemeinern; es ist nämlich die erste Vorzahl

353)
$$\mu(a,r,1) = \lg a+1^{\circ|1}E^{-1}v2.\left\{\frac{r}{a}\right\}^1-1^{2|1}E^{-1}v3.\left\{\frac{r}{a}\right\}^2-1^{3|1}E^{-1}v5.\left\{\frac{r}{a}\right\}^4-\cdots$$

und jede folgende mte Vorzahl

354) $$m^{2|1}.\mu(a,r,m+1) = (-)^{m+1}\left(\left\{\frac{r}{a}\right\}^{m} - m^{1|1}.E^{-1}v2.\left\{\frac{r}{a}\right\}^{m+1}\right.$$
$$\left. + m^{2|1}E^{-1}v3.\left\{\frac{r}{a}\right\}^{m+2} + m^{4|1}.E^{-1}v5.\left\{\frac{r}{a}\right\}^{m+4} + \ldots\right)$$

§. 108.

Das Zurückführen späterer auf frühere schon vollendete Arbeiten ist bei wirklichen Berechnungen sehr wichtig. Gleichungen, welche diesen Zweck haben, erhalten wir auf folgende Art. Es ist

$$a^{p+q|r} = a^{p|r} \cdot (a+pr)^{q|r}$$

also

$$\lg: a^{p+q|r} = \lg: a^{p|r} + \lg: (a+pr)^{q|r}$$

Entwickeln wir nun diese Logarithmen in Reihen nach den Potenzen von q

$$\lg a^{p+q|r} = \mu'(a,r,1)\,(p+q)^1 + \mu(a,r,2).(p+q)^2 + \mu(a,r,3)\,(p+q)^3 + \ldots$$
$$= \mu(a,r,1) \cdot p^1 + \mu(a,r,2) \cdot p^2 + \mu(a,r,3) \cdot p^3 + \ldots$$
$$+ \left[1^{1|1}.\mu(a,r,1) + 2^{1|1}\mu(a,r,2).p^1 + 3^{1|1}\mu(a,r,3) \cdot p^2 + \ldots\right]\frac{q^1}{1^{1|1}}$$
$$+ \left[1^{2|1}.\mu(a,r,2) + 2^{2|1}\mu(a,r,3).p^1 + 3^{2|1}\mu(a,r,4) \cdot p^2 + \ldots\right]\frac{q^2}{1^{2|1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lg a^{p|r} = \mu(a,r,1) \cdot p^1 + \mu(a,r,2) \cdot p^2 + \ldots$$

und

$$\lg (a+pr)^{q|r} = \mu(a+pr,r,1) \cdot q^1 + \mu(a+pr,r,2) \cdot q^2 + \ldots$$

so erhaltea wir durch Gleichsetzung gleichhoher Potenzen von q folgende Gleichungen

355) $$1^{1|1}.\mu(a+pr,r,1) = 1^{1|1}\mu(a,r,1) + 2^{1|1}\mu(a,r,2).p^1 + 3^{1|1}\mu(a,r,3)p^2 + \ldots$$
$$1^{2|1}.\mu(a+pr,r,2) = 1^{2|1}\mu(a,r,2) + 2^{2|1}\mu(a,r,3).p^1 + 3^{2|1}\mu(a,r,4)p^2 + \ldots$$
$$1^{3|1}.\mu(a+pr,r,3) = 1^{3|1}\mu(a,r,3) + 2^{3|1}\mu(a,r,4).p^1 + 3^{3|1}\mu(a,r,5)p^2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ferner ist

$$a^{q+1|r} = a^{q|r} \cdot (a + qr)$$

$$\lg : a^{q+1|r} = \lg : a^{q|r} + \lg : (a+qr)$$

$$\lg : a^{q+1|r} = \mu(a,r,1).(1+q)^1 + \mu(a,r,2).(1+q)^2 + \ldots\ldots$$

$$= \mu(a,r,1)+\mu(a,r,2)+\mu(a,r,3) + \ldots\ldots$$

$$+ [1^{1|1}\mu(a,r,1)+2^{1|1}\mu(a,r,2)+3^{1|1}\mu(a,r,3) + \ldots] \frac{q^1}{1}$$

$$+ [1^{2|1}\mu(a,r,2)+2^{2|1}\mu(a,r,3)+3^{2|1}\mu(a,r,4) + \ldots] \frac{q^2}{1.2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lg a^{q|r} = \mu(a,r,1)q^1+\mu(a,r,2)q^2 + \ldots\ldots$$

$$\lg (a+qr) = \lg a + \frac{1}{1}\left\{\frac{r}{a}\right\}^1 \cdot q^1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{r}{a}\right\}^2 q^2 + \ldots\ldots - \ldots$$

folglich

356) $$\lg a = \mu(a,r,1)+\mu(a,r,2)+\mu(a,r,3) + \ldots\ldots$$

$$1^{0|1}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^1 = 2^{1|1}\mu(a,r,2)+3^{1|1}\mu(a,r,3)+4^{1|1}\mu(a,r,4) + \ldots\ldots$$

$$- 1^{1|1}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^2 = 2^{2|1}\mu(a,r,3)+3^{2|1}\mu(a,r,4)+4^{2|1}\mu(a,r,5) + \ldots\ldots$$

$$+ 1^{2|1}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^3 = 2^{3|1}\mu(a,r,4)+3^{3|1}\mu(a,r,5)+4^{3|1}\mu(a,r,6) + \ldots\ldots$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Verbinden wir diese Gleichungen mit jenen in 355, so gewinnen wir folgende

357) $$\mu(a+r,r,1) = \mu(a,r,1)+\frac{1}{1}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^1$$

$$\mu(a+r,r,2) = \mu(a,r,2)-\frac{1}{2}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^2$$

$$\mu(a+r,r,3) = \mu(a,r,3)+\frac{1}{3}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu(a+r,r,m) = \mu(a,r,m)+(-)^{m-r}.\frac{1}{m}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^m$$

welche die Vorzahlen bei der Grundzahl $a+r$ auf die Vorzahlen bei der Grundzahl a mit Leichtigkeit übertragen.

§. 109.

Gleichungen, welche die Vorzahlen für ein verneintes r auf Vorzahlen für das bejahete r übertragen, erhalten wir durch Entwicklung der Logarithmen der Producte der Gleichung

$$a^{n|r} \,.\, a^{-n|-r} = \frac{a}{a+nr} = \frac{1}{1+\frac{rn}{a}}$$

$$\lg a^{n|r} + \lg a^{-n|-r} = -\lg\left(1+\frac{r}{a}\,.\,n\right)$$

$$\mu(a,r,1).n^1 + \mu(a,r,2).n^2 + \mu(a,r,3).n^3 + \ldots.$$

$$-\mu(a,-r,1).n^1+\mu(a,-r,2).n^2-\mu(a,-r,3).n^3+\ldots.$$

$$= -\frac{1}{1}\left\{\frac{r}{a}\right\}^1 n^1+\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{a}\right\}^2 n^2-\frac{1}{3}\left\{\frac{r}{a}\right\}^3 n^3+\ldots.$$

Die Gleichungen, welche wir suchen, sind also

358)
$$\mu(a,r,1)-\mu(a,-r,1) = -\frac{1}{1}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^1$$

$$\mu(a,r,2)+\mu(a,-r,2) = +\frac{1}{2}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^2$$

$$\mu(a,r,3)-\mu(a,-r,3) = -\frac{1}{3}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^3$$

. . . . . .

$$\mu(a,r,m)+(-)^m\mu(a,-r,m) = (-)^m.\frac{1}{m}.\left\{\frac{r}{a}\right\}^m$$

Durch Verbindung dieser Gleichungen mit den Gleichungen 357 entstehen zu gleichem Zwecke folgende

359
$$\mu(a+r,r,1) = \mu(a,-r,1)$$
$$\mu(a+r,r,2) = -\mu(a,-r,2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu(a+r,r,m) = (-)^{m-1}.\mu(a,-r,m)$$

Entwicklung des Logarithmen von $a^{n|r}$ nach den Potenzen von r.

$$\lg a^{n|r} = \zeta(a,n,0).r^0+\zeta(a,n,1).r^1+\zeta(a,n,2).r^2+\zeta(a,n,3).r^3+ \ldots .$$

§. 110.

Damit hier die allgemeinen Vorschriften in 58 und 64 angewendet werden können, so wird zuerst der allgemeine Fall auf einen besondern zurückgebracht. Wir gebrauchen hierzu die Gleichung

$$a^{n|r} = a^n \,.\, 1^{n|\frac{r}{a}}$$

Nach dieser Gleichung ist

$$\lg : a^{n|r} = n \,.\, \lg : a + \lg : 1^{n|\frac{r}{a}} =$$

$$= n \lg a+\zeta(1,n,0) \,.\, \left\{\frac{r}{a}\right\}^0+\zeta(1,n,1).\left\{\frac{r}{a}\right\}^1+\zeta(1,n,2).\left\{\frac{r}{a}\right\}^2$$

und also

360)
$$\begin{aligned}
\zeta(a,n,0) &= n \,.\, \lg a + \zeta(1,n,0)\\
\zeta(a,n,1) &= a^{-1} \,.\, \zeta(1,n,1)\\
\zeta(a,n,2) &= a^{-2} \,.\, \zeta(1,n,2)\\
&\ldots\ldots\\
\zeta(a,n,p) &= a^{-p} \,.\, \zeta(1,n,p)
\end{aligned}$$

§. 111.

Legen wir nun zur Entwicklung des Logarithmen die Reihen

$$V = 1^{n|\frac{r}{a}} = 1 + \alpha(n,1).\left\{\frac{r}{a}\right\}^1+\alpha(n,2).\left\{\frac{r}{a}\right\}^2+\alpha(n,3).\left\{\frac{r}{a}\right\}^3 + \ldots$$

und

$$\lg 1^{n|\frac{r}{a}} = \zeta(1,n,0)+\zeta(1,n,1).\left\{\frac{r}{a}\right\}^1+\zeta(1,n,2).\left\{\frac{r}{a}\right\}^2+\ldots$$

zum Grunde, so erhalten wir die unabhängige Bildungsweise aus 64

361) $$\zeta(1,n,0) = 0$$

und

362) $$\zeta(1,n,m)=\tfrac{1}{1}k(m,2)\,V^1v(m+1)-\tfrac{1}{2}k(m,3).V^2v(m+1)+\ldots \ldots(-)^{m-1}.\tfrac{1}{m}.k(m,m+1).V^mv(m+1)$$

und die zurücklaufende aus 58

363) $$(m+1).\alpha(n,m+1) = (m+1)\zeta(1,n,m+1).\alpha(n,0)+m.\zeta(1,n,m).\alpha(n,1)+\ldots+1\zeta(1,n,1).\alpha(n,m)$$

Da ferner

$$\lg a^{0|r} = \lg 1 = 0$$

$$\lg a^{1|r} = \lg a$$

$$\lg a^{-1|r} = \lg\frac{1}{a-r} = -\lg a-\frac{1}{1}\left\{\frac{r}{a}\right\}^1-\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{a}\right\}^2-\ldots$$

so ist auch

364) $$\zeta(a,0,p) = 0$$

365) $$\zeta(a,1,0) = \lg a;\quad \zeta(a,1,p) = 0$$

und

366) $$\zeta(a,-1,0) = -\lg a,\quad \zeta(a,-1,p) = -\frac{1}{p\,.\,a^p}$$

§. 112.

Die frühere Entwicklung nach den Potenzen von n können wir auch hier zur Entwicklung nach den Potenzen von r benutzen. Wir setzen in

350 und 352 $m = 1,2,3,\ldots$, und ordnen die Elemente nach den Potenzen von r; wir erhalten die Reihe

367) $$\lg a^{n|r} = n \,.\, \lg a$$
$$+\left\{\frac{r}{a}\right\}^{1}(1^{0|1}E^{-1}v2.n^{1}+\frac{1}{1.2}.n^{2})$$
$$-\left\{\frac{r}{a}\right\}^{2}(1^{1|1}E^{-1}v3.n^{1}+\tfrac{1}{2}E^{-1}v2.n^{2}-\frac{1}{2.3}.n^{3})$$
$$+\left\{\frac{r}{a}\right\}^{3}(2^{0|1}E^{-1}v3.n^{2}+\tfrac{1}{3}E^{-1}v2.n^{3}+\frac{1}{3.4}.n^{4})$$
$$-\left\{\frac{r}{a}\right\}^{4}(2^{2|1}E^{-1}v5.n^{1}+4^{0|1}E^{-1}v3.n^{3}+\tfrac{1}{4}E^{-1}v2.n^{4}+\frac{1}{4.5}.n^{5})$$
$$+\left\{\frac{r}{a}\right\}^{5}(3^{2|1}E^{-1}v5.n^{2}+5^{0|1}E^{-1}v3.n^{4}+\tfrac{1}{5}E^{-1}v2.n^{5}+\frac{1}{5.6}.n^{6})$$
$$-\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

Das allgemeine Gesetz für diese unabhängige Bildungsweise giebt folgende Gleichung an

368) $$\zeta(a,n,o) = n \,.\, \lg{:}a \quad \text{und}$$
$$\zeta(a,n,m) = (-)^{m-1}.a^{-m}\left\{\frac{1^{m-1|1}.E^{-1}v(m+1).n^{1}}{1}+\frac{2^{m-2|1}.E^{-1}vm.n^{2}}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{3^{m-3|1}.E^{-1}v(m-1).n^{3}}{3}+\ldots+\frac{m^{0|1}.E^{-1}v2.n^{m}}{m}+\frac{n^{m+1}}{m(m+1)}\right\}$$

§. 113.

Eine dritte unabhängige Bildungsweise finden wir, wenn wir das Product in seine Factoren auflösen

$$a^{n|r} = a(a+r)(a+2r)\ldots[a+(n-1)r]$$
$$= a^{n}(1+\frac{r}{a})(1+\frac{2r}{a})\ldots(1+\frac{(n-1)r}{a})$$

und nun den Logarithmen jedes Factors in eine Reihe entwickeln

$$\lg a^{n|r} = n \cdot \lg a + \lg\left(1+\frac{r}{a}\right) + \lg\left(1+\frac{2r}{a}\right) \ldots + \lg\left(1+\frac{(n-1)r}{a}\right)$$

$$= n.\lg a + \frac{1^1}{1}\left\{\frac{r}{a}\right\}^1 - \frac{1^2}{2}\left\{\frac{r}{a}\right\}^2 + \frac{1^3}{3}\left\{\frac{r}{a}\right\}^3 - \ldots$$

$$+ \frac{2^1}{1}\left\{\frac{r}{a}\right\}^1 - \frac{2^2}{2}\left\{\frac{r}{a}\right\}^2 + \frac{2^3}{3}\left\{\frac{r}{a}\right\}^3 - \ldots.$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{(n-1)^1}{1}\left\{\frac{r}{a}\right\}^1 - \frac{(n-1)^2}{2}\left\{\frac{r}{a}\right\}^2 + \frac{(n-1)^3}{3}\left\{\frac{r}{a}\right\}^3 - \ldots.$$

Es ist folglich

369) $$\lg a^{n|r} = n \cdot \lg a$$

$$+ \frac{1}{1}\left\{\frac{r}{a}\right\}^1 [1^1+2^1+3^1+\ldots+(n-1)^1]$$

$$- \frac{1}{2}\left\{\frac{r}{a}\right\}^2 [1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]$$

$$+ \frac{1}{3}\left\{\frac{r}{a}\right\}^3 [1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3]$$

$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und ganz allgemein

370) $$\zeta(a,n,m) = (-)^{m-1}.a^{-m}.[1^m+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m]$$

§. 114.

Ausser der zurücklaufenden Bildungsweise 363, finden wir auf folgendem Wege eine zweite.

Es ist

$$a^{n|r} = \left(1+\frac{(n-1)r}{a}\right)^n . a^{n|\frac{ar}{a+(n-1)r}}$$

folglich

$$\lg a^{n|r} = n\left(\frac{(n-1)r}{1.a} - \frac{(n-1)^2r^2}{2.a^2} + \frac{(n-1)^3r^3}{3.a^3} - \ldots\right)$$

$$+\zeta(a,n,0) - \zeta(a,n,1)a^1r^1[a+(n-1)r]^{-1} + \zeta(a,n,2)a^2r^2[a+(n-1)r]^{-2} - \ldots.$$

Werden nun die verschiedenen Potenzen von $a+(n-1)r$ entwickelt, die Producte nach den Potenzen von r geordnet, und die Vorzahlen der Potenzen von r den Vorzahlen gleichhoher Potenzen von r in der Reihe

$$\lg a^{n|r} = \zeta(a,n,0)+\zeta(a,n,1).r^1+\zeta(a,n,2).r^2+ \ldots$$

gleichgesetzt, so gewinnen wir folgende Gleichungen

371)
$$\begin{aligned} 2.\zeta(a,n,2m+1) = &-\zeta(a,n,2m) \;.\; k(2m,2).(n-1)^1.a^{-1} \\ &-\zeta(a,n,2m-1).k(2m,3).(n-1)^2.a^{-2} \\ &-\zeta(a,n,2m-2).k(2m,4).(n-1)^3.a^{-3} \\ &- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &-\zeta(a,n,1).k(2m,2m+1).(n-1)^{2m}.a^{-2m} \\ &+\frac{n}{m} \;.\; (n-1)^{2m+1}.a^{-2m-1} \end{aligned}$$

und

372)
$$\begin{aligned} 0 = &\;\zeta(a,n,2m+1).k(2m+1,2) \\ &+\zeta(a,n,2m) \;.\; k(2m+1,3).(n-1)^1.a^{-1} \\ &+\zeta(a,n,2m-1).k(2m+1,4).(n-1)^2.a^{-2} \\ &+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+\zeta(a,n,1).k(2m+1,2m+2).(n-1)^{2m}.a^{-2m} - \frac{n}{2m+2}(n-1)^{2m+1}a^{-2m-1} \end{aligned}$$

welche jedoch nur geeignet sind, die Vorzahlen mit ungeraden Stellenzahlen aus den vorhergehenden Vorzahlen abzuleiten. Wenn beide Gleichungen mit einander verbunden werden, so kann eine dritte gebildet werden, welche auch die Vorzahlen mit geraden Stellenzahlen angiebt.

§. 115.

Eine zurücklaufende Bildungsweise in Hinsicht n finden wir durch Entwicklung der Logarithmen von den Producten

$$a^{n+m|r} = a^{n|r}.(1+\frac{nr}{a})^{m}.a^{m|\frac{ar}{a+nr}}$$

nämlich

$$\lg a^{n+m|r} = m.\lg(1+\frac{nr}{a})+\lg a^{n|r}+\lg a^{m|\frac{ar}{a+nr}}$$

$$= \frac{m}{1}.\left\{\frac{n}{a}\right\}^{1}.r^{1}-\frac{m}{2}\left\{\frac{n}{a}\right\}^{2}r^{2}+\frac{m}{3}\left\{\frac{n}{a}\right\}^{3}r^{3}-\ldots.$$

$$+\zeta(a,n,o)+\zeta(a,n,1)r^{1}+\zeta(a,n,2)r^{2}+\ldots.$$

$$+\zeta(a,m,o)+\zeta(a,m,1)a^{1}r^{1}(a+nr)^{-1}+\zeta(a,m,2).a^{2}r^{2}.(a+nr)^{-2}+\ldots.$$

Werden nun noch die verschiedenen Binomien nach den Potenzen von r entwickelt, so erhalteu wir folgende allgemeine Gleichung

373) $$\zeta(a,n+m,p) = \zeta a,n,p)+(-)^{p-1}.\left(\frac{m}{p}\left\{\frac{n}{a}\right\}^{p}\right.$$

$$+\zeta(a,m,1).k(p-1,1).\left\{\frac{n}{a}\right\}^{p-1}-\zeta(a,m,2).k(p-1,2).\left\{\frac{n}{a}\right\}^{p-2}$$

$$\left.+\zeta(a,m,3).k(p-1,3).\left\{\frac{n}{a}\right\}^{p-3}-\ldots(-)^{p-1}\zeta(a,m,p).k(p-1,p).\left\{\frac{n}{a}\right|^{o}\right)$$

welche die Bildung von $\zeta(a,n+m,p)$ auf $\zeta(a,n,p)$ und $\zeta(a,m,p)$ zurückführt.

Wird $m = 1$ angenommen, so wird nach 365

374) $$\zeta(a,n+1,p) = \zeta(a,n,p)+(-)^{p-1}.\frac{1}{p}\left\{\frac{n}{a}\right|^{p}$$

§. 116.

Eine Gleichung, welche die Vorzahlen bei einem verneinten n auf jene bei einem bejaheten n zurückführt, finden wir durch die Gleichung

$$a^{n|r} \cdot a^{-n|-r} = \frac{a}{a+nr}$$

welche schon früher in Anwendung gekommen ist. Es ist nämlich

$$\lg a^{n|r} + \lg a^{-n|-r} = \lg\left(1+\frac{nr}{a}\right)$$

und

$$\begin{aligned} &\zeta(a,n,0)+\zeta(a,n,1)r^1+\zeta(a,n,2)r^2 + \ldots \\ &+\zeta(a,-n,0)-\zeta(a,-n,1)r^1+\zeta(a,-n,2)r^2 - \ldots \\ &= \frac{1}{1}\left\{\frac{n}{a}\right\}^1 r^1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{n}{a}\right\}^2 r^2 + \frac{1}{3}\left\{\frac{n}{a}\right\}^3 r^3 - \ldots \end{aligned}$$

und folglich

375) $$\zeta(a,n,p)+(-)^p\zeta(a,-n,p) = (-)^{p-1}.\frac{1}{p}\left\{\frac{n}{a}\right\}^p$$

Setzen wir diese Gleichung mit der vorigen in Verbindung, so erhalten wir die Gleichung

376) $$\zeta(a,n+1,p) = (-)^{p-1}\left[\zeta(a,-n,p)+\frac{2}{p}\left\{\frac{n}{a}\right\}^p\right]$$

Besondere Entwicklung des Logarithmen von $a^{n|r}$.

§. 117.

Werden die Producte, welche 35o in der Entwicklung von $\lg : a^{n|r}$ vorkommen, nach den Vorzahlen des Polynomiums E^{-1} geordnet, so wird, wenn wir $\frac{r}{a} = x$ setzen

$$\lg a^{n|r} = n^1 \lg a + \frac{n^2x^1}{1.2} - \frac{n^3x^2}{2.3} + \frac{n^4x^3}{3.4} - \frac{n^5x^4}{4.5} + \ldots$$

$$+E^{-1}v2.\left(\frac{n^1x^1}{1} - \frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^3x^3}{3} - \frac{n^4x^4}{4} + \ldots\right)$$

$$+E^{-1}v3\,(-n^1x^2+n^2x^3-n^3x^4+n^4x^5- \ldots)$$

$$+E^{-1}v5.(-2^{2|1}n^1x^4+3^{2|1}n^2x^5-4^{2|1}n^3x^6+ \ldots)$$

$$+E^{-1}v7.(-2^{4|1}n^1x^6+3^{4|1}n^2x^7-4^{4|1}n^3x^8+ \ldots)$$

$$+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Bemerken wir nun, dafs

$$\frac{nx}{1} - \frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^3x^3}{3} - \ldots = \lg(1+nx)$$

$$\frac{n^2x^1}{1.2} - \frac{n^3x^2}{2.3} + \frac{n^4x^3}{3.4} - \ldots = -n+\left(n+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{nx}{1} - \frac{n^2x^2}{2} + \ldots\right)$$

$$= -n+\left(n+\frac{1}{x}\right)\lg(1+nx)$$

und

$$-2^{m|1}n^1x^{m+2}+3^{m|1}n^2.x^{m+3}-4^{m|1}n^3x^{m+4}+ \ldots = 1^{m|1}x^{m+1}[-1+(1+nx)^{-m-1}]$$

so geht die obige Reihe in folgende über

$$377) \qquad \lg a^{n|r} = -n+(\tfrac{1}{2}-\frac{a}{r})\lg a+(n+\frac{a}{r}-\tfrac{1}{2})\lg(a+nr)$$

$$+ 1^{0|1}.E^{-1}v3.\left(\left\{\frac{r}{a+nr}\right\}^{1}-\left\{\frac{r}{a}\right\}^{1}\right)$$

$$+ 1^{2|1}.E^{-1}v5.\left(\left\{\frac{r}{a+nr}\right\}^{3}-\left\{\frac{r}{a}\right\}^{3}\right)$$

$$+ 1^{4|1}E^{-1}v7.\left(\left\{\frac{r}{a+nr}\right\}^{5}-\left\{\frac{r}{a}\right\}^{5}\right)$$

$$+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ 1^{2m'1}.E^{-1}v(2m+3).\left(\left\{\frac{r}{a+nr}\right\}^{2m+1}-\left\{\frac{r}{a}\right\}^{2m+1}\right)$$

$$+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Anhang.

Bestehend in der Entwicklung der Producte aus ungleich zunehmenden Factoren.

§. 118.

Die Factoren, aus welchen die Producte gebildet werden sollen, seyen

$$1+a_1,\ 1+a_2,\ 1+a_3,\ 1+a_4,\ 1+a_5,\ \ldots.$$

die Producte werden auf folgende Art bezeichnet

378) $$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n) = (1+a_1|_n)$$

Es ist

$$(1+a_1)(1+a_2) = 1+a_1+a_2(1+a_1)$$

also

$$(1+a_1|2) = 1+a_1(1+a_1|0)+a_2(1+a_1|1)$$

Kommt ein dritter Factor $1+a_3$ hinzu, so läfst 1 das Vorstehende unverändert, und a_3 bewirkt, dafs noch ein neues Glied

$$a_3(1+a_1)(1+a_2) = a_3(1+a_1|2)$$

hinzutritt; es ist also

$$(1+a_1|3) = 1+a_1(1+a_1|0)+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a_1|2)$$

Ein vierter Factor $1+a_4$ setzt, wie vorhin, nur ein Glied hinzu, so dafs

$$(1+a_1|4) = 1+a_1(1+a_1|0)+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a_1|2)+a_4(1+a_1|3)$$

Es ist überhaupt

379) $$(1+a_1|n) = 1+a_1(1+a_1|0)+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a_1|2)+\ldots+a_n(1+a_1|n-1)$$

§. 119.

Sind zwei verschiedene Arten von Factoren vorhanden, welche durch a und b unterschieden werden mögen, so werde allgemein

$$a_n+b_n+a_nb_n = A_n$$

gesetzt; es ist

$$(1+a_1)(1+b_1) = 1+A_1$$
$$(1+a_2)(1+b_2) = 1+A_2$$
$$(1+a_3)(1+b_3) = 1+A_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und folglich

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+b_1)(1+b_2) = (1+a_1)(1+b_1)+(1+a_1)(1+b_1)A_2$$
$$= 1+A_1+(1+a_1)(1+b_1)A_2$$

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+b_1)(1+b_2)(1+b_3) = (1+a_1)(1+a_2)(1+b_1)(1+b_2)+$$
$$+(1+a_1)(1+a_2)(1+b_1)(1+b_2)A_3$$
$$= 1+A_1+(1+a_1)(1+b_1)A_2+(1+a_1)(1+a_2)(1+b_1)(1+b_2)A_3$$

Auf gleiche Weise bilden wir das folgende Product, indem wir dies letztere mit $1+A_4$ vervielfachen. Wir erhalten allgemein folgende Reihe

380) $$(1+a_1|n)(1+b_1|n) = 1+(1+a_1|0)(1+b_1|0)A_1+(1+a_1|1)(1+b_1|1)A_2$$
$$+(1+a_1|2)(1+b_1|2)A_3+ \ldots +(1+a_1|n-1)(1+b_1|n-1)A_n$$

Diese beiden Reihen sind sehr allgemein und umfassend; sie sind um desto merkwürdiger, da ihre Entwicklung in Producten besteht, ähnlich den Producten, welche entwickelt werden sollen. Die Reihen selbst können verschiedene Gestalten annehmen, die vorzüglichsten sind folgende:

Wir setzen

$$a_1 = a_1-1, \; a_2 = a_2-1, \; a_3 = a_3-1 \ldots\ldots$$

und

$$b_1 = b_1-1, \; b_2 = b_2-1, \; b_3 = b_3-1, \ldots\ldots$$

Die Reihen 379 und 380 nehmen hierdurch folgende Gestalt an

381) $$a_1.a_2.a_3 \ldots a_n = 1+(a_1-1)+(a_2-1)a_1+(a_3-1)a_1a_2$$
$$+(a_4-1)a_1a_2a_3+ \ldots +(a_n-1)a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}$$

und

382) $$a_1a_2a_3 \ldots a_nb_1b_2b_3 \ldots b_n = 1+(a_1b_1-1)+(a_2b_2-1)a_1b_1$$
$$+(a_3b_3-1)a_1a_2b_1b_2+ \ldots +(a_nb_n-1)a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}.b_1b_2b_3 \ldots b_{n-1}$$

Wird $b_n = -\frac{b_n}{1+b_n}$ gesetzt, so geht 381 über in

383) $$\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = 1+\frac{(1+a_1|0)}{(1+b_1|0)}\cdot\frac{a_1-b_1}{1+b_1}+\frac{(1+a_1|1)}{(1+b_1|1)}\cdot\frac{a_2-b_2}{1+b_2}+$$
$$+\frac{(1+a_1|2)}{(1+b_1|2)}\cdot\frac{a_3-b_3}{1+b_3}+ \ldots +\frac{(1+a_1|n-1)}{(1+b_1|n-1)}\cdot\frac{a_n-b_n}{1+b_n}$$

oder wird $b_1 = \frac{1}{b}$, $a_1 = a$

$$b_2 = \frac{1}{b+c_1}, \quad a_2 = a+c_1$$

$$b_3 = \frac{1}{b+c_2}, \quad a_3 = a+c_2$$

. . . . . .

$$b_n = \frac{1}{b+c_{n-1}}, \quad a_n = a+c_{n-1}$$

gesetzt, so wird aus 382

384) $$\left\{\frac{(a+c_1)(a+c_2)(a+c_3) \ldots (a+c_n)}{(b+c_1)(b+c_2)(b+c_3) \ldots (b+c_n)}-\frac{b}{a}\right\}\frac{a}{a-b} =$$
$$= 1+\frac{a}{b+c_1}+\frac{a(a+c_1)}{(b+c_1)(b+c_2)}+\frac{a(a+c_1)(a+c_2)}{(b+c_1)(b+c_2)(b+c_3)}+ \ldots$$
$$\ldots +\frac{a(a+c_1)(a+c_2) \ldots (a+c_{n-1})}{(b+c_1)(b+c_2) \ldots (b+c_n)}$$

Wird $a_1 = \frac{a}{b}$ und $b_1 = \frac{d}{b}$

$$a_2 = \frac{a}{b+c_1} \qquad b_2 = \frac{d}{b+c_1}$$

$$a_3 = \frac{a}{b+c_2} \qquad b_3 = \frac{d}{b+c_2}$$

$$a_4 = \frac{a}{b+c_3} \qquad b_4 = \frac{d}{b+c_3}$$

. . . . . .

angenommen, so wird aus 380

$$385) \quad \frac{(a+b)(d+b)(a+b+c_1)(d+b+c_1)\ldots(a+b+c_n)(d+b+c_n)}{b\,.\,b\,.\,(b+c_1)(b+c_1)\ldots(b+c_n)(b+c_n)} =$$

$$= 1 + \frac{ad+b(a+d)}{b\,.b} + \frac{(a+b)(d+b)}{b\,.\,b} \cdot \frac{ad+(b+c_1)(a+d)}{(b+c_1)(b+c_1)}$$

$$+ \frac{(a+b)(d+b)(a+b+c_1)(d+b+c_1)}{b\,.\,b\,.\,(b+c_1)\,.\,(b+c_1)} \cdot \frac{ad+(b+c_2)(a+d)}{(b+c_2)(b+c_2)}$$

. . . . . .

$$+ \frac{(a+b)(d+b)\ldots(a+b+c_{n-1})(d+b+c_{n-1})}{b\,.\,b\ldots.\,(b+c_{n-1})(b+c_{n-1})} \cdot \frac{ad+(b+c_n)(a+d)}{(b+c_n)(b+c_n)}$$

Alle diese Gleichungen sind nur verschiedene Formen der ursprünglichen Gleichung 379; sie unterscheiden sich nur durch die Leichtigkeit, welche die eine Form oft mehr als die andere beim Uebergange zu bestimmten Fällen gewährt. Vorzüglich ist in dieser Hinsicht diejenige zu merken, welche aus 380 entspringt, wenn

$$a_1 = a_1 - 1 \quad \text{und} \quad b_1 = b_1 - 1$$

$$a_2 = a_2 - 1 \qquad b_2 = b_2 - 1$$

. . . . . .

$$a_n = a_n - 1 \qquad b_n = b_n - 1$$

gesetzt wird, nämlich

386) $$\frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n} = 1 + \frac{a_1 - b_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2 - b_2}{b_2} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \cdot \frac{a_3 - b_3}{b_3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}}{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1}} \cdot \frac{a_n - b_n}{b_n}$$

§. 120.

Nach diesem können wir den unendlichen Bruch

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \ldots}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \ldots}$$

in eine Reihe entwickeln; wir setzen

$$a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_3 = 7,\ a_4 = 9,\ a_5 = 11,\ \ldots$$

und

$$b_1 = 4,\ b_2 = 4,\ b_3 = 8,\ b_4 = 8,\ b_5 = 12,\ \ldots$$

und erhalten folgende unendliche Reihe

387) $$\frac{3.5.7.9.11\ldots}{4.4.8.8.12\ldots} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.4} - \frac{1.3.5}{4.4.8} + \frac{1.3.5.7}{4.4\,8.8} - \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12} + \ldots$$

Setzen wir aber

$$a_1 = 3.5,\ a_2 = 7.9,\ a_3 = 11.13,\ a_4 = 15.17,\ \ldots$$

und

$$b_1 = 4^2,\ b_2 = 8^2,\ b_3 = 12^2,\ b_4 = 16^2,\ \ldots$$

so wird

388) $$\frac{3.5.7.9\ldots}{4.4.8.8\ldots} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3.5}{4.4.8.8} - \frac{3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12} - \ldots$$

Auf gleiche Weise behandeln wir den Bruch

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \ldots}$$

und setzen

$$a_1 = 2\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 4,\ a_5 = 6, \ldots\ldots$$

und

$$b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 3,\ b_4 = 5,\ b_5 = 5, \ldots\ldots$$

Die Reihe, welche hierdurch entsteht, ist

$$389)\quad \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2.2}{3.3} - \frac{2.2.4}{3.3.5} + \frac{2.2.4.4}{3.3.5.5} - \frac{2.2.4.4.6}{3.3.5.5.7} +$$

$$+ \frac{2.2.4.4.6.6}{3.3.5.5.7.7} - \ldots + \ldots$$

Zuletzt setzen wir

$$a_1 = 2 \cdot 2,\ a_2 = 4 \cdot 4,\ a_3 = 6 \cdot 6,\ a_4 = 8 \cdot 8, \ldots\ldots$$

und

$$b_1 = 1 \cdot 3,\ b_2 = 3 \cdot 5,\ b_3 = 5 \cdot 7,\ b_4 = 7 \cdot 9, \ldots\ldots$$

und erhalten die Reihe

$$390)\quad \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2.2}{3.3.5} + \frac{2.2.4.4}{3.3.5.5.7} + \frac{2.2.4.4.6.6}{3.3.5.5.7.7.9} + \ldots\ldots$$

SECHSTE ABHANDLUNG.

SECHSTE ABHANDLUNG.

Geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen.

§. 121.

Alle geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu p Elementen aus n Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ werden durch

(p,n;o)

und alle geordnete Verbindungen mit Wiederholungen zu p Elementen aus n Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$ werden durch

[p,n;o]

vorgestellt; der erste Buchstabe p bedeutet die Anzahl der Elemente, welche in jeder Verbindung seyn sollen, der zweite Buchstabe n, wie viele Elemente überhaupt in allen Verbindungen vorkommen, der dritte und die folgenden Buchstaben sind jene, welche in den Verbindungen nicht vorkommen sollen, so stellt

(3,7;2,4,6)

alle geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zu dreien aus den Elementen a_1, a_3, a_5, a_7 vor, worunter also die Elemente a_2, a_4, a_6 fehlen, nämlich

aaa
135
137
157
357

Wenn also die dritte Stelle mit o besetzt ist, so zeigt dieses an, dafs kein Element fehlen darf, z. B.

$(3,5;o) = 123$
124
125
134
135
145
234
235
245
345
aaa

§. 122.

Es ist bekannt, dafs

391) $(p+1,n;o) = (p+1,n;s)+a_s.(p,n;s)$

Es ist also auch

$$(p+1,n;s) = (p+1,n;o)-a_s.(p,n;s)$$

Wird in dieser Gleichung $p-1$, $p-2$, $p-3$, ... $p-q+1$ statt p gesetzt,

$$(p,n;s) = (p,n;o)-a_s.(p-1,n;s)$$
$$(p-1,n;s) = (p-1,n;o)-a_s.(p-2,n;s)$$
$$(p-2,n;s) = (p-2,n;o)-a_s.(p-3,n;s)$$
. . . . . .
$$(p-q+1,n;s) = (p-q+1,n;o)-a_s.(p-q,n;s)$$

und werden die folgenden Werthe in die früheren Gleichungen eingeführt, so entsteht die Gleichung

392) $(p,n;s) = (p,n;o)-a_s^1.(p-1,n;o)+a_s^2.(p-2,n;o)-a_s^3.(p-3,n;o)$
$+ \ldots (-)^{q-1}.a_s^{q-1}.(p-q+1,n;o)+(-)^q a_s^q(p-q,n;s)$

Ist $p = q$, so wird das letzte Glied $(-)^p.a_s^p$, statt dessen $(-)^p.a_s^p.(o,n;o)$ gesetzt werden kann.

Diese Reihe geht nach den steigenden bejaheten Potenzen von a, fort; eine Reihe, welche nach den fallenden Potenzen desselben Elements fortgeht, finden wir auf gleiche Weise aus der Gleichung 391, nämlich

$$(p,n;s) = a_s^{-1}.(p+1,n;o) - a_s^{-1}.(p+1,n;s)$$
$$(p+1,n;s) = a_s^{-1}.(p+2,n;o) - a_s^{-1}.(p+2,n;s)$$
$$(p+2,n;s) = a_s^{-1}.(p+3,n;o) - a_s^{-1}.(p+3,n;s)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(p+q-1,n;s) = a_s^{-1}.(p+q,n;o) - a_s^{-1}.(p+q,n;s)$$

und folglich

393) $$(p,n;s) = a_s^{-1}.(p+1,n;o) - a_s^{-2}.(p+2,n;o) + a_s^{-3}.(p+3,n;o) - \ldots$$
$$\ldots (-)^{q-1} a_s^{-q}.(p+q,n;o) + (-)^q a_s^{-q}.(p+q,n;s)$$

Ist $q = n-p$, so ist das letzte Glied

$$(n,n;s) = o$$

§. 123.

Die erste Gleichung

$$(p,n;o) = (p,n;s) + a_s(p-1,n;s)$$

führt, indem immer ein späteres Element aus den ursprünglichen Verbindungen gehoben wird, zu neuen Zusammensetzungen der Verbindungen überhaupt; es ist nämlich

$$(p,n;s) = (p,n;s,s+1) + a_{s+1}.(p-1,n;s,s+1)$$
$$(p-1,n;s) = (p-1,n;s,s+1) + a_{s+1}.(p-2,n;s,s+1)$$

daher

$$(p,n;o) = (p,n;s,s+1) + \begin{matrix} a_s \\ a_{s+1} \end{matrix} \Big| \begin{matrix} (p-1,n;s,s+1) \\ a_s a_{s+1}.(p-2,n;s,s+1) \end{matrix}$$

Wird in dieser Gleichung

$$(p,n;s,s+1) = (p,n;s,s+1,s+2)+a_{s+2}.(p-1,n;s,s+1,s+2)$$

$$(p-1,n;s,s+1) = (p-1,n;s,s+1,s+2)+a_{s+2}.(p-2,n;s,s+1,s+2)$$

$$(p-2,n;s,s+1) = (p-2,n;s,s+1,s+2)+a_{s+2}.(p-3,n;s,s+1,s+2)$$

gesetzt, so entsteht folgende:

$$(p,n;o) = (p,n;s,s+1,s+2)+\begin{vmatrix} a_s & a_{s+1} \\ a_{s+1} & a_{s+2} \end{vmatrix}(p-1,n;s,s+1,s+2)$$

$$+\begin{vmatrix} a_s & a_{s+1} \\ a_s & a_{s+2} \\ a_{s+1} & a_{s+2} \end{vmatrix}(p-2,n;s,s+1,s+2)+a_s a_{s+1} a_{s+2}.(p-3,n;s,s+1,s+2)$$

Der Fortgang der Rechnung ist hier deutlich vorgezeichnet, er führt zu der allgemeinen Gleichung

394) $$(p,n;o) = (p,n;s,s+1,\ldots,s+q-1)$$

$$+ (1,n;1,2,\ldots,s-1,s+q,s+q+1,\ldots,n).(p-1,n;s,s+1,\ldots,s+q-1)$$

$$+ (2,n;1,2,\ldots,s-1,s+q,s+q+1,\ldots,n).(p-2,n;s,s+1,\ldots,s+q-1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (q,n;1,2,\ldots,s-1,s+q,s+q+1,\ldots,n).(p-q,n;s,s+1,\ldots,s+q-1)$$

Ist z. B. $p = 4$, $n = 7$, $s = 3$, $q = 2$, so ist

$$(4,7;o) = (4,7;3,4)+(1,7;1,2,5,6,7)(3,7;3,4)+(2,7;1,2,5,6,7)(2,7;3,4)$$

1234 + 2345 = 1256 + 3	125 + 34	12
1235 2346 1257 4	126	15
1236 2347 1267	127	16
1237 2356 1567	156	17
1245 2357 2567	157	25
1246 2367	167	26
1247 2456	256	27
1256 2457	257	56
1257 2467	267	57
1267 2567	567	67
1345 3456		
1346 3457		
1347 3467		
1356 3567		
1357 4567		
1367		
1456		
1457		
1467		
1567		

§. 124.

Diese Art, die Verbindungen zu zerlegen, ist von folgender sehr verschieden; es ist

12 = 12+1	3+23 = 12+1	4+34 = 12+1	5+45 = 12+1	6+56
13	4 24 13 2	5 35 13 2	6 46 13 2	
14	5 25 23	6 36 14 3	56 14 3	
15	6 26	45 23	15 4	
16	34	46 24	23	
23	35	56 34	24	
24	36		25	
25	45		34	
26	46		35	
34	56		45	
35				
36				
45				
46				
56				

ferner ist

123 = 123+12	4+1	34+234 = 123+12	5+1	45+345 = 123+12	6+1	56+456
124	5	35 235	124 13	6 2	46 346	124 13	2	
125	6	36 236	134 23		56 356	125 14	3	
126		45 245	234		456	134 23		
134		46 246				135 24		
135		56 256				145 34		
136		345				234		
145		346				235		
146		356				245		
156		456				345		
234								
235								
236								
245								
246								
256								
345								
346								
356								
456								

ferner

1234 = 1234+123	5+12	45+1	345+2345 = 1234+123	6+12	56+1	456+3456
1235	6	46	346 2346	1235 124	13	2	
1236		56	356 2356	1245 134	23		
1245			456 2456	1345 234			
1246			3456	2345			
1256							
1345							
1346							
1356							
1456							
2345							
2346							
2356							
2456							
3456							

und ganz allgemein

395) $(p,n;o) = (p,n;s,s+1,\ldots n)$
$+ (p-1,n;s-1,s,\ldots,n)(1,n;1,2,\ldots,s-1)$
$+ (p-2,n;s-2,s-1,\ldots,n)(2,n;1,2,\ldots,s-2)$
$+ (p-3,n;s-3,s-2,\ldots,n)(3,n;1,2,\ldots,s-3)$
. . . . . .
$+ (p-p,n;s-p,s-p+1,\ldots,n)(p,n;1,2,\ldots,s-p)$

§. 125.

Bilden wir mehrere Classen

$$(p,n;1),\ (p,n;2),\ (p,n;3),\ \ldots\ldots\ (p,n;n)$$

von Verbindungen, so dafs in jeder Classe ein Element fehlt, so bemerken wir, dafs irgend eine bestimmte Verbindung von p Elementen aus allen jenen Classen ausgeschlossen seyn mufs, denen nur eines dieser p Elemente fehlt; jene bestimmte Verbindung kommt also in p Classen nicht vor, mufs aber in jeder der übrigen n—p Classen vorkommen, denn alle die erforderlichen p Elemente sind unter den Elementen jeder dieser n—p Classen begriffen. Es ist also

396) $(p,n;1)+(p,n;2)+(p,n;3)+\ldots+(p,n;n) = (n-p)(p,n;o)$

Z. B. die Verbindung $a_1a_3a_4$ kommt nur in der zweiten und fünften Classe vor

$$(3,5;1)+(3,5;2)+(3,5;3)+(3,5;4)+(3,5;5) = (5-3)(3,5;o)$$

234	134	124	123	123	= 2	123
235	135	125	125	124		124
245	145	145	135	134		125
345	345	245	235	234		134
aaa	aaa	aaa	aaa	aaa		135
						145
						234
						235
						245
						345
						aaa

Wird aber jede Classe mit dem ihr fehlenden Elemente verbunden

1234	2134	3124	4123	5123
1235	2135	3125	4125	5124
1245	2145	3145	4135	5134
1345	2345	3245	4235	5234
aaaa	aaaa	aaaa	aaaa	aaaa

so mufs jede bestimmte Verbindung von vier Elementen in so vielen Classen vorkommen, als diese Verbindung Elemente zählt; es ist also

397) $a_x(p-1,n;1)+a_2(p-1,n;2)+a_3(p-1,n;3)+\ldots+a_n(p-1,n;n) = p.(p,n;o)$

Beide Gleichungen können auch auf folgende Art dargestellt werden

398) $\Sigma(p,n;x) = (n-p)(p,n;o)$ und $\Sigma a_x(p-1,n;x) = p.(p,n;o)$

wo 1, 2, 3, ... n statt x gesetzt werden mufs.

§. 126.

Kehren wir wieder zu der ersten Gleichung

$$(p,n;o) = (p,n;x)+a_x.(p-1,n;x)$$

zurück, vervielfachen sie mit $(a_x)^q$, und setzen 1, 2, ... n statt x, so gewinnen wir die Gleichung

399) $$(p,n;o).\Sigma a_x{}^q = \Sigma a_x{}^q(p,n;x)+\Sigma a_x{}^{q+1}(p-1,n;x)$$

welche die zurücklaufende Bildungsweise der Summe einer Reihe angiebt, die aus n Classen von geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, vervielfacht mit den Potenzen des fehlenden Elements, besteht. Wir können hierdurch die Summe dieser zusammengesetzten Reihe

$$\Sigma a_x{}^{q+1}.(p-1,n;x)$$

auf die Summe der einfacheren Reihen

$$\Sigma a_x{}^q,\ \Sigma a_x{}^{q-1},\ \Sigma a_x{}^{q-2},\ \ldots\ .$$

zurückführen, wenn wir $q = 1, 2, 3, \ldots$ setzen. Es ist nämlich bei

$q = 1$

$$\Sigma a_x^{2}.(p-1,n;x) = (p,n;o).\Sigma a_x^{1}-(p+1)(p+1,n;o)$$

Denn nach 398 ist $\Sigma a_x(p,n;x) = (p+1).(p+1,n;o)$

Ferner ist für $q = 2$

$$\Sigma a_x^{3}(p-1,n;x) = (p,n;o)\Sigma a_x^{2}-\Sigma a_x^{2}(p,n;x)$$

also, wenn in der vorigen Gleichung $p+1$ statt p gesetzt wird

$$\Sigma a_x^{3}(p-1,n;x) = (p,n;o)\Sigma a_x^{2}-(p+1,n;o)\Sigma a_x^{1}+(p+2).(p+2,n;o)$$

Verfolgen wir diese Rechnung weiter, so gelangen wir zuletzt zu der allgemeinen Gleichung

400) $$\Sigma a_x^{q}(p-1,n;x) = (p,n;o).\Sigma a_x^{q-1}-(p+1,n;o).\Sigma a_x^{q-2}$$
$$+(p+2,n;o).\Sigma a_x^{q-3}-\ldots(-)^{q}(p+q-2,n;o).\Sigma a_x^{1}+(-)^{q+1}(p+q-1).(p+q-1,n;o)$$

Wenn q verneint genommen wird, so entspringt aus der ursprünglichen Gleichung

$$(p,n;o)\Sigma a_x^{-q} = \Sigma a_x^{-q}(p,n;x)+\Sigma a_x^{-q+1}(p-1,n;x)$$

zuerst die Gleichung

$$\Sigma a_x^{-1}(p,n;x) = (p,n;o)\Sigma a_x^{-1}-(n-p+1)(p-1,n;o)$$

Setzen wir in der obigen Gleichung $q = 2$, und wenden hierbei die vorstehende Gleichung an, so entsteht

$$\Sigma a_x^{-2}(p,n;x) = (p,n;o)\Sigma a_x^{-2}-(p-1,n;o)\Sigma a_x^{-1}+(n-p+2)(p-2,n;o)$$

Allgemein finden wir auf diesem Wege, dafs

401) $$\Sigma a_x^{-q}(p,n;x) = (p,n;o)\Sigma a_x^{-q}-(p-1,n;o)\Sigma a_x^{-q+1}$$
$$+(p-2,n;o)\Sigma a_x^{-q+2}-\ldots(-)^{q-1}(p-q+1,n;o)\Sigma a_x^{-1}+(-)^{q}(n-p+q)(p-q,n;o)$$

Zwei besondere Fälle von diesen beiden Gleichungen sind sehr bekannt; der eine, wenn in 400 $p = 1$, und der andere, wenn in 401 $p=n$ gesetzt wird, nämlich

402) $$\Sigma a_x^{q} = a_1^{q}+a_2^{q}+\ldots+a_n^{q} =$$
$$= (1,n;o).\Sigma a_x^{q-1}-(2,n;o).\Sigma a_x^{q-2}+(3,n;o).\Sigma a_x^{q-3}-\ldots$$
$$\ldots(-)^{q}(q-1,n;o)\Sigma a_x^{1}+(-)^{q+1}.q.(q,n;o)$$

und

403) $$0 = (n,n;o)\Sigma a_x^{-q} - (n-1,n;o)\Sigma a_x^{-q+1} + (n-2,n;o)\Sigma a_x^{-q+2} - \ldots$$
$$\ldots (-)^{q-1}(n-q+1,n;o)\Sigma a_x^{-1} + (-)^q . q . (n-q,n;o)$$

Die letztere Gleichung geht aber, wenn sie durch (n,n;o) gemessen wird, in die Gleichung 402 über.

Geordnete Verbindungen mit Wiederholungen.

§. 127.

Es ist

404) $$[p,n;o] = a_s.[p-1,n;o]+[p,n;s]$$

Nach dieser Gleichung können folgende gebildet werden

$$\begin{aligned}
[p,n;o] &= a_1[p-1,n;o] + [p,n;1] \\
[p,n;1] &= a_2[p-1,n;1] + [p,n;1,2] \\
[p,n;1,2] &= a_3[p-1,n;1,2] + [p,n;1,2,3] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[p,n;1,2,\ldots,q-1] &= a_q[p-1,n;1,2,\ldots,q-1]+[p,n;1,2,\ldots q]
\end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen zusammengezählt, so entsteht die Gleichung

405) $$[p,n;o] = a_1[p-1,n;o]+a_2[p-1,n;1]+a_3[p-1,n;1,2]+\ldots$$
$$\ldots a_q[p-1,n;1,2,\ldots,q-1]+[p,n;1,2,\ldots,q]$$

Ist $q = n-1$, so werden die beiden letzten Glieder

$$a_{n-1}[p-1,n;1,2,\ldots,n-2]+a_n[p-1,n;1,2,\ldots,n-1]$$

Die Verbindungen mit Wiederholungen können nach den Potenzen eines Elements geordnet werden, als

1111 + 111	2 + 11	22 + 1	222 + 2222
	3	23	223 2223
	4	24	224 2224
		33	233 2233
		34	234 2234
		44	244 2244
			333 2333
			334 2334
			344 2344
			444 2444
			3333
			3334
			3344
			3444
			4444

und es ist allgemein

406) $[p,n;o] = a_s^p.[o,n;s]+a_s^{p-1}.[1,n;s]+a_s^{p-2}.[2,n;s]+\ldots+a_s^o[p,n;s]$

Die genannten Verbindungen lassen sich auch in mehrere Abtheilungen bringen, als

1111 + 111	3 + 11	33 + 1	333 + 3333
1112 112	4 12	34 2	334 3334
1122 122	22	44	344 3344
1222 222			444 3444
2222			4444

und allgemein

407) $[p,n;o] = [p,n;s,s+1,\ldots,n]+[p-1,n;s,s+1,\ldots,n].[1,n;1,2,\ldots,s-1]$
$+[p-2,n;s,s+1,\ldots,n].[2,n;1,2,\ldots,s-1]+[p-3,n;s,s+1,\ldots,n].[3,n;1,2,\ldots,s-1]$
$+\ldots+[o,n;s,s+1,\ldots,n]\,[p,n;1,2,\ldots,s-1]$

§. 128.

Durch die drei Gleichungen 405, 406 und 407 werden die sämmtlichen Verbindungen mit Wiederholungen, welche zu einer Classe gehören, durch mehrere Classen dargestellt, wovon nicht jede alle Verbindungen

aus Mangel eines oder mehrerer Elemente enthält. Wir legen uns jetzt die umgekehrte Aufgabe vor, nämlich eine Classe von geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus nicht allen Elementen durch Classen von geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus allen Elementen darzustellen. Bei der Lösung dieser Aufgabe gehen wir wieder von der ersten Gleichung 404 aus, worauf unsere ganze Untersuchung beruht, und geben ihr folgende Gestalt

$$[p,n;s] = [p,n;o] - a_s.[p-1,n;o]$$

Nach dieser Gleichung bilden wir folgende

$$\begin{aligned}[p,n;s,s+1] &= [p,n;s] - a_{s+1}.[p-1,n;s] \\ &= [p,n;o] - a_s.[p-1,n;o] - a_{s+1}\{[p-1,n;o] - a_s[p-,2n;o]\} \\ &= [p,n;o] - \begin{vmatrix} a_s \\ a_{s+1} \end{vmatrix} [p-1,n;o] + a_s a_{s+1}.[p-2,n;o]\end{aligned}$$

ferner ist

$$[p,n;s,s+1,s+2] = [p,n;s,s+1] - a_{s+2}.[p-1,n;s,s+1]$$

Setzen wir nun statt $[p,n;s,s+1]$ die vorigen Werthe, und dann auch

$$[p-1,n;s,s+1] = [p-1,n;o] - \begin{vmatrix} a_s \\ a_{s+1} \end{vmatrix} [p-2,n;o] + a_s a_{s+1}.[p-3,n;o]$$

vervielfachen diese noch mit a_{s+2}, und zählen nun die Producte von den vorigen ab, so erhalten wir folgende Gleichung

$$[p,n;s,s+1,s+2] = [p,n;o] - \begin{vmatrix} a_s \\ a_{s+1} \\ a_{s+2} \end{vmatrix} [p-1,n;o] + \begin{vmatrix} a_s & a_{s+1} \\ a_s & a_{s+2} \\ a_{s+1} & a_{s+2} \end{vmatrix} [p-2,n;o] - a_s a_{s+1} a_{s+2}.[p-3,n;o]$$

Verfolgen wir diese Rechnungen weiter, so führen sie durch einen immer steten und unabänderlichen Gang zu der allgemeinen Gleichung

408) $$[p,n;s,s+1,\ldots,s+q-1] = [p,n;o] - [p-1,n;o].(1,n;1,2,\ldots,s-1,s+q,s+q+1,\ldots,n) + [p-2,n;o].(2,n;1,2,\ldots,s-1,s+q,s+q+1,\ldots,n) - [p-3,n;o].(3,n;1,2,\ldots,s-1,s+q,s+q+1,\ldots,n) + \ldots (-)^q[p-q,n;o].(q,n;1,2,\ldots,s-1,s+q,s+q+1,\ldots,n)$$

Ist $q = n-s+1$, so geht diese Gleichung in folgende über

409) $$[p,n;s,s+1,\ldots,n] = [p,n;o] - [p-1,n;o].(1,n;1,2,\ldots,s-1) + [p-2,n;o].(2,n;1,2,\ldots,s-1) - [p-3,n;o].(3,n;1,2,\ldots,s-1) + \ldots (-)^{n-s+1}.[p-n+s-1,n;o].(n-s+1,n;1,2,\ldots,s-1)$$

Ist $s = 1$, so wird aus 408

410) $$[p,n;1,2,\ldots,q] = [p,n;o] - [p-1,n;o].(1,n;q+1,q+2,\ldots,n) + [p-2,n;o].(2,n;q+1,q+2,\ldots,n) - [p-3,n;o].(3,n;q+1,q+2,\ldots,n) + \ldots (-)^q[p-q,n;o].(q,n;q+1,q+2,\ldots n)$$

oder kürzer

411) $$[p,n;1,2,3,\ldots q] = [p,n;o] - [p-1,n;o].(1,q;o) + [p-2,n;o](2,q;o) - [p-3,n;o](3,q;o) + \ldots (-)^q[p-q,n;o](q,q;o)$$

wo $(1,q;o),(2,q;o),\ldots$ die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus den ersten q Elementen bedeuten.

Ist $q = n$, so ist

412) $$o = [p,n;o] - [p-1,n;o](1,n;o) + [p-2,n;o](2,n;o) - \ldots \ldots (-)^p[p-p,n;o].(p,n;o)$$

§. 129.

In allen diesen Verbindungen ohne Wiederholungen der letzteren Gleichungen kommen wenigere Elemente vor, als in den Verbindungen mit Wiederholungen; in dem Falle, wenn die Anzahl der Elemente in beiden Verbindungsclassen gleich werden, wie in 412, wird die ganze Reihe = o. Dieses veranlafst zu der Frage; wem gleicht die Reihe, wenn die Anzahl der Elemente in den Verbindungen ohne Wiederholungen grösser ist, als in jenen mit Wiederholungen?

Die Reihe, welche wir uns hier vorlegen, ist:

$$[p,n;o]-[p-1,n;o].(1,n+m;o)+[p-2,n;o].(2,n+m;o) \ldots$$
$$\ldots (-)^h[p-h,n;o].(h,n+m;o)+ \ldots (-)^p[p-p,n;o].(p,n+m;o) = A$$

Zerlegen wir nach 394 (h,n+m;o) in die Producte

$$(h,n+m;o) = (o,n+m;1,2,\ldots n)(h,n+m;n+1,\ldots,n+m)+$$
$$+(1,n+m;1,2,\ldots n)(h-1,n+m;n+1,\ldots n+m)+$$
$$+(2,n+m;1,2,\ldots n)(h-2,n+m;n+1,\ldots n+m)+\ldots$$
$$\ldots+(h,n+m;1,2,\ldots n).(o,n+m;n+1,\ldots,n+m)$$

und setzen $h = o,1,2,\ldots,p$, so können wir die vorgegebene Reihe A in mehrere andere Reihen zerlegen, welche sämmtlich in folgender begriffen sind:

$$(-)^k(k,n+m;1,2,\ldots n)\{[p-k,n;o](o,n+m;n+1,\ldots n+m)-$$
$$-[p-k-1,n;o].(1,n+m;n+1,\ldots n+m)+[p-k-2,n;o].(2,n+m;n+1,\ldots n+m)-$$
$$\ldots (-)^{p-k}[o,n;o](p-k,n+m;n+1,\ldots,n+m)\}$$

Die letzte eingeklammerte Reihe verschwindet nach 412 für alle bejahete Werthe von k, ausser wenn k = p ist, in diesem Fall ist sie = 1 und also die vorgegebene Reihe A

$$= (-)^p(p,n+m;1,2,\ldots n)$$

Es ist folglich

413) $$(p,n+m;1,2,\ldots n) = (p,n+m;o).[o,n;o]-(p-1,n+m;o).[1,n;o]$$
$$+(p-2,n+m;o).[2,n;o]-\ldots\ (-)^p(p-p,n+m;o).[p,n;o]$$

§. 130.

Durch Verbindung der Gleichungen 408 und 395 entsteht eine neue Gleichung, in welcher die Verbindungsclassen nicht wie 408 dieselben Elemente, sondern immer verschiedene enthalten. Jede Verbindungsclasse ohne Wiederholungen in 408 ist begriffen in

$$(h,n;1,\ldots,s-1,s+q,\ldots n)$$

oder, da hier n—q Elemente nicht vorkommen, begriffen in

$$(h,q;o)$$

wobei bemerkt werden mufs, dafs hierin nur die Elemente

$$a_s,\ a_{s+1},\ \ldots,\ a_{s+q-1}$$

vorkommen. Diese Verbindungsclasse kann nach 395 in folgende zerlegt werden

$$(h,q;o) = (h,q;s+q-1)$$
$$+ (h-1,q;s+q-2,s+q-1)(1,q;s,\ldots,s+q-2)$$
$$+ (h-2,q;s+q-3,\ldots,s+q-1)(2,q;s,\ldots,s+q-3)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (h-h,q;s+q-h-1,\ldots,s+q-1)(h,q;s,\ldots,s+q-h-1)$$

oder, wenn wir die fehlenden Elemente in die Bezeichnung wieder aufnehmen

$$(h,n;1,\ldots,s-1,s+q,\ldots n) = (h,n;1,\ldots,s-1,s+q-1,\ldots n)$$
$$+ (h-1,n;1,\ldots,s-1,s+q-2,\ldots n)(1,n;1,\ldots,s+q-2,s+q,\ldots,n)$$
$$+ (h-2,n;1,\ldots,s-1,s+q-3,\ldots n)(2,n;1,\ldots,s+q-3,s+q,\ldots,n)$$
$$+ (h-3,n;1,\ldots,s-1,s+q-4,\ldots n)(3,n;1,\ldots,s+q-4,s+q,\ldots,n)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (h—h,n;1,\ldots,s-1,s+q-h-1,\ldots n)(h,n;1,\ldots s+q—h-1,s+q,\ldots n)$$

Durch diese Zerlegung geht die Gleichung 408 in folgende über

$$[p,n;s,s+1,\ldots,s+q-1] = [p,n;o]$$

$$\begin{array}{l|l}
-[p-1,n;o] & (1,n;1,\ldots,s-1,s+q-1,\ldots n) \\
 & +(o,n;1,\ldots,s-1,s+q-2,\ldots n)(1,n;1,\ldots,s+q-2,s+q,\ldots n) \\
+[p-2,n;o] & (2,n;1,\ldots,s-1,s+q-1,\ldots n) \\
 & +(1,n;1,\ldots,s-1,s+q-2,\ldots,n)(1,n;1,\ldots s+q—2,s+q,\ldots n) \\
 & +(o,n;1,\ldots,s-1,s+q—3,\ldots n)(2,n;1,\ldots s+q—3,s+q,\ldots n) \\
- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(-)^{q-1}[p-q+1,n;o] & (q-1,n;1,\ldots s-1,s+q-1,\ldots n) \\
 & +(q-2,n;1,\ldots s-1,s+q-2,\ldots n)(1,n;1,\ldots,s+q-2,s+q,\ldots n) \\
 & +(q-3,n;1,\ldots s-1,s+q-3,\ldots n)(2,n;1,\ldots,s+q-3,s+q,\ldots n) \\
 & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & +(o,n;1,\ldots s-1,s,\ldots n)(q-1,n;1,\ldots,s,s+q,\ldots n)
\end{array}$$

$$(-)^q[p-q,n;o] \cdot (q,n;1,\ldots,s-1,s+q,\ldots n)$$

oder

$$= [p,n;o]$$

$$-[p-1,n;o](1,n;1,\ldots s-1,s+q-1,\ldots n)$$

$$+[p-2,n;o](2,n;1,\ldots s-1,s+q-1,\ldots n)$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^{q-1}[p-q+1,n;o](q-1,n;1,\ldots s-1,s+q-1,\ldots n)$$

$$\begin{array}{l|l}
-(1,n;1,\ldots s+q-2,s+q,\ldots n) & [p-1,n;o](o,n;1,\ldots s-1,s+q-2,\ldots n) \\
 & -[p-2,n;o](1,n;1,\ldots s-1,s+q-2,\ldots n) \\
 & +[p-3,n;o](2,n;1,\ldots s-1,s+q-2,\ldots n) \\
 & (-)^{q-2}[p-q+1,n;o](q-2,n;1,\ldots s-1,s+q-2,\ldots n)
\end{array}$$

$$+(2,n;1,\ldots s+q-3,s+q,\ldots n)\Big|\begin{array}{l}[p-2,n;o](o,n;1,\ldots s-1,s+q-3,\ldots n)\\ -[p-3,n;o](1,n;1,\ldots s-1,s+q-3,\ldots n)\\ +[p-4,n;o](2,n;1,\ldots s-1,s+q-3,\ldots n)\\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (-)^{q-1}[p-q+1,n;o](q-3,n;1,\ldots s-1,s+q-3,\ldots n)\end{array}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^{q-2}(q-2,n;1,\ldots,s+1,s+q,\ldots n)\Big|\begin{array}{l}[p-q+1,n;o](o,n;1,\ldots s-1,s+1,\ldots n)\\ -[p-q+1,n;o](1,n;1,\ldots s-1,s+1,\ldots n)\end{array}$$

$$(-)^{q-1}(q-1,n;1,\ldots s,s+q,\ldots n)\cdot[p-q+1,n;o](o,n;1,\ldots s-1,s\ldots n)$$

$$(-)^{q}(q,n;1,\ldots s-1,s+q,\ldots n)\cdot[p-q,n;o]$$

Bemerken wir nun, dafs nach 408

$$[p-h,n;o](o,n;1,\ldots s-1,s+q-h-1,\ldots n)$$
$$-[p-h-1,n;o](1,n;1,\ldots s-1,s+q-h-1,\ldots n)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{q-h-1}[p-q+1,n;o](q-h-1,n;1,\ldots s-1,s+q-h-1,\ldots n)$$
$$=[p-h,n;s,\ldots,s+q-h-2]$$

so finden wir, dafs

414) $$[p,n;s,\ldots,s+q-1]=[p,n;s,\ldots,s+q-2]$$
$$-(1,n;1,\ldots,s+q-2,s+q,\ldots n)[p-1,n;s,\ldots,s+q-3]$$
$$+(2,n;1,\ldots,s+q-3,s+q,\ldots n)[p-2,n;s,\ldots,s+q-4]$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{q-2}(q-2,n;1,\ldots,s+1,s+q,\ldots n)[p-q+2,n;s]$$
$$(-)^{q-1}(q-1,n;1,\ldots,s,s+q,\ldots n)[p-q+1,n;o]$$
$$(-)^{q}(q,n;1,\ldots,s-1,s+q,\ldots n)[p-q,n;o]$$

Ist $s=1$, so ist

415) $[p,n;1,\ldots q] = [p,n;1,\ldots q-1]$
$-(1,n;1,\ldots q-1,q+1,\ldots n)[p-1,n;1,\ldots q-2]$
$+(2,n;1,\ldots q-2,q+1,\ldots n)[p-2,n;1,\ldots q-3]$
$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(-)^{q-2}(q-2,n;1,2,q+1,\ldots n)[p-q+2,n;1]$
$(-)^{q-1}(q-1,n;1,q+1,\ldots n)[p-q+1,n;o]$
$(-)^{q}(q,n;q+1,\ldots n)[p-q,n;o]$

Ist zugleich $q = n$, so ist

416) $o = [p,n;1,\ldots,n-1]$
$-(1,n;1,\ldots,n-1)[p-1,n;1,\ldots n-2]$
$+(2,n;1,\ldots,n-2)[p-2,n;1,\ldots n-3]$
$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(-)^{p}(p,n;1,\ldots,n-p)[o,n;1,\ldots,n-p-1]$

Ist z. B $n = 6$, $p = 4$, so ist

$o = [4,6;1,2,3,4,5] - (1,6;1,2,3,4,5)[3,6;1,2,3,4]$
$+(2,6;1,2,3,4)[2,6;1,2,3] - (3,6;1,2,3)[1,6;1,2] + (4,6;1,2)[o,6;1]$

$$o = 6666 - 6\left|\begin{matrix}555\\556\\566\\666\end{matrix}\right. + 56\left|\begin{matrix}44\\45\\46\\55\\56\\66\end{matrix}\right. - 456\left|\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix}\right. + 3456$$

§. 131.

Auf gleiche Weise behandeln wir die Gleichung 413; wir setzen nach 395

$$(p-h,n+m;o) = (p-h,n+m;n-q,n-q+1,\ldots,n+m)(o,n+m;1,\ldots,n-q)$$
$$+ (p-h-1,n+m;n-q-1,n-q,\ldots,n+m)(1,n+m;1,\ldots,n-q-1)$$
$$+(p-h-2,n+m;n-q-2,n-q-1,\ldots,n+m)(2,n+m;1,\ldots,n-q-2)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(o,n+m;n-q-p+h,n-q-p+h+1,\ldots,n+m)(p-h,n+m;1,\ldots,n-q-p+h)$$

die Gleichung 413 geht hierdurch in folgende über

$$(-)^p(p,n+m;1,2,\ldots n) = [p,n;o].(o,n+m;n-q,\ldots,n+m)(o,n+m;1,2,\ldots,n-q)$$
$$-[p-1,n;o]\,|\,(1,n+m\ n-q,\ldots,n+m)(o,n+m;1,2,\ldots,n-q)$$
$$|+(o,n+m;n-q-1,\ldots,n+m)(1,n+m;1,2,\ldots,n-q-1)$$
$$+[p-2,n;o]\,|\,(2,n+m;n-q,\ldots,n+m)(o,n+m;1,2,\ldots,n-q)$$
$$|+(1,n+m;n-q-1,\ldots,n+m)(1,n+m;1,2,\ldots,n-q-1)$$
$$|+(o,n+m;n-q-2,\ldots,n+m)(2,n+m;1,2,\ldots,n-q-2)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p[p-p,n;o]\,|\,(p,n+m\ n-q,\ldots,n+m)(o,n+m;1,2,\ldots,n-q)$$
$$|+(p-1,n+m;n-q-1,\ldots,n+m)(1,n+m;1,2,\ldots,n-q-1)$$
$$|+(p-2,n+m;n-q-2,\ldots,n+m)(2,n+m;1,2,\ldots,n-q-2)$$
$$|+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|+(p-p,n+m,n-q-p,\ldots,n+m)(p,n+m;1,2,\ldots,n-q-p)$$

und diese durch eine andere Ordnung der Producte in folgende

$$= (o,n+m;1,2,\ldots,n-q)\,|\,[p,n;o](o,n+m,n-q,\ldots,n+m)$$
$$|-[p-1,n;o](1,n+m\ n-q,\ldots,n+m)$$
$$|+[p-2,n,o](2,n+m,n-q,\ldots,n+m)$$
$$|-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|(-)^p[o,n\ o](p,n+m;n-q,\ldots,n+m)$$
$$-(1,n+m;1,2,\ldots,n-q-1)\,|\,[p-1n;o](o,n+m;n-q-1,\ldots,n+m)$$
$$|-[p-2,n;o](1,n+m;n-q-1,\ldots,n+m)$$
$$|+[p-3,n;o](2,n+m;n-q-1,\ldots,n+m)$$
$$|-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|(-)^{p-1}[o,n;o]\ p-1,n+m;n-q-1,\ldots,n+m)$$

$$+(2,n+m;1,2,\ldots,n\quad q-2)\left|\begin{array}{l}[p-2,n;o](o,n+m;n-q-2,\ldots,n+m)\\ -[p-3,n;o](1,n+m;n-q-2,\ldots,n+m)\\ +\ldots\ldots\ldots\\ (-)^{p-2}[o,n;o](p-2,n+m;n-q-2,\ldots,n+m)\end{array}\right.$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^{p}(p,n+m;1,2,\ldots,n-q-p)\cdot[o,n;o](o,n+m;n-q-p,\ldots,n+m)$$

Da nun nach 411

$$\left.\begin{array}{l}[p-k,n;o](o,n+m;n-q-k,\ldots,n+m)\\ -[p-k-1,n;o](1,n+m;n-q-k,\ldots,n+m)\\ +\ldots\ldots\ldots\\ (-)^{p-k}[o,n;o](p-k,n+m;n-q-k,\ldots,n+m)\end{array}\right|\text{ oder }\left|\begin{array}{l}[p-k,n;o](o,n-q-k-1;o)\\ -[p-k-1,n;o](1,n-q-k-1;o)\\ +\ldots\ldots\ldots\\ (-)^{p-k}[o,n;o](p-k,n-q-k-1;o)\end{array}\right.$$

$$=[p-k,n;1,2,\ldots,n-q-k-1]$$

ist, so entsteht folgende Reihe

$$\begin{aligned}417)\quad (-)^{p}(p,n+m;1,2,\ldots,n) &= (o,n+m;1,2,\ldots,n-q)\cdot[p,n;1,2,\ldots,n-q-1]\\ &-(1,n+m;1,2,\ldots,n-q-1)\cdot[p-1,n;1,2,\ldots,n-q-2]\\ &+(2,n+m;1,2,\ldots,n-q-2)\cdot[p-2,n;1,2,\ldots,n-q-3]\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(-)^{p}(p,n+m;1,2,\ldots,n-q-p)\cdot[p-p,n;1,2,\ldots,n-q-p-1]\end{aligned}$$

Ist z. B. $n=6$, $m=2$, $p=2$, $q=3$, so ist

$$(2,8;1,2,\ldots,6)=(o,8;1,2,3)[2,6;1,2]-(1,8;1,2)[1,6;1]+(2,8;1)[o,6;o]$$

oder

7 . 8 =	33	—	3	2 +	23
	34		4	3	24
	35		5	4	25
	44		6	5	26
	45		7	6	27
	46		8		28
	55				34
	56				35
	66				36
					37
					38
					45
					46
					47
					48
					56
					57
					58
					67
					68
					78

SIEBENTE ABHANDLUNG.

SIEBENTE ABHANDLUNG.

Producte aus Factoren mit wiederkehrenden Elementen.

§. 132.

Das Product

$$(a_s+ub_x)(a_s+ub_2)(a_s+ub_3)\ .\ .\ .\ .\ (a_s+ub_n)$$

werde vorgestellt durch

$$a(a_s+ub_y) \text{ oder durch } a(a_s+ub_y,n)$$
$$y=1,2,...,n$$

Wenn Elemente fehlen, so mögen sie ihren Platz nach n nehmen und zwar durch (;) von den übrigen getrennt; sollen z. B. die Factoren

$$a_s+ub_5 \text{ und } a_s+ub_8$$

nicht im Producte vorkommen, so werde das Product vorgestellt durch

$$a(a_s+ub_y,n;5,8) \text{ oder } a(a_s+ub_y;5,8)$$
$$y=1,2,...n$$

Die Summe der Producte

$$a(a_1+ub_y,n)+a(a_2+ub_y,n)+a(a_3+ub_y,n)+\ .\ .\ .\ +a(a_n+ub_y,n)$$

werde bezeichnet durch

$$\Sigma a(a_x+ub_y)$$
$$x=1,2,...n \text{ und } y=1,2,...m$$

und wenn die Anzahl der Elemente von a und b gleich ist, entweder durch

$$\Sigma a(a_x+ub_y) \text{ oder } \Sigma a(a_x+ub_y,n)$$
$$x=y=1,2,...n$$

Der Buchstabe a bezieht sich auf y und der Buchstabe Σ auf x.

Fehlt in jedem Producte der Factor a_x+ub_s, so werde dieses angezeigt durch

$\Sigma a(a_x+ub_y;s)$ oder $\Sigma a(a_x+ub_y,n;s)$
$x = y = 1,2,...n$

§. 133.

Nachdem wir die Zeichen für diese Producte festgesetzt haben, gehen wir zur Untersuchung der Producte über. Es ist nach 1

$$a(a_x+ua_y,n;x) = a_x^{n-1}+(1,n;x)a_x^{n-2}u^1+(2,n;x)a_x^{n-3}u^2+ \ldots +(n-1,n;x)a_x^0u^{n-1}$$

mithin die Summe der Reihe

$$\Sigma a_x^p a(a_x+ua_y,n;x)$$

auf die Summirung folgender Reihe zurückgebracht

$$\Sigma a_x^{p+n-1}+u^1\Sigma(1,n;x)a_x^{p+n-2}+u\,\Sigma(2,n;x)a_x^{p+n-3}+ \ldots +u^{n-1}\Sigma'n-1,n;x)a_x^p$$

In dieser Reihe kommen die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen vor, in welchen ein Element fehlt; wir können solche nach 400 in Verbindungen aus allen Elementen übertragen, und dadurch selbst die Summirung vereinfachen; es ist nämlich

$$\Sigma(h,n;x)a_x^{p+n-h-1} = (h+1,n;o)\Sigma a_x^{p+n-h-2}-(h+2,n;o)\Sigma a_x^{p+n-h-3}+ \ldots$$
$$\ldots (-)^{n-h-1}(n,n;o)\Sigma a_x^{p-1}$$

und folglich

418) $$\Sigma a_x^p a(a_x+ua_y,n;x) = (1,n;o)\Sigma a_x^{p+n-2}+(u-1)(2,n;o)\Sigma a_x^{p+n-3}$$
$$+(u^2-u^1+1\ (3,n;o)\Sigma a_x^{p+n-4}+ \ldots +(u^{n-1}-u^{n-2}+ \ldots +u^0)(n,n;o)\Sigma a_x^{p-1}$$

In dem besondern Falle, wenn $u = +1$ ist, ist

419) $$\Sigma a_x^p a(a_x+a_y,n;x) = (1,n;o)\Sigma a_x^{p+n-2}+(3,n;o)\Sigma a_x^{p+n-4}+(5,n;o)\Sigma a_x^{p+n-6}+..$$

Ist aber $u = -1$, so ist

420) $$\Sigma a_x^p a(a_x-a_y,n;x) = (1,n;o)\Sigma a_x^{p+n-2}-2.(2,n;o)\Sigma a_x^{p+n-3}$$
$$+3(3,n;o)\Sigma a_x^{p+n-4}- \ldots (-)^{n-1}(n,n;o)\Sigma a_x^{p-1}$$

Ist z. B. $p = 2$, $n = 3$, so ist

$$\Sigma a_x^2 a(a_x+a_y,3\,x) = a_1^2 a(a_1+a_y,3;1)+a_2^2 a(a_2+a_y,3;2)+a_3^2 a(a_3+a_y,3;3)$$

$$= a_1^2(a_1+a_2)(a_1+a_3)+a_2^2(a_2+a_1)(a_2+a_3)+a_3^2\,a_3+a_1)(a_3+a_2)$$

$$= (1,3;0)\Sigma a_x^3+(3,3;0)\Sigma a_x^1 = \begin{array}{c|l|l|c} 1 & 111 & + \;123 & 1 \\ 2 & 222 & & 2 \\ 3 & 333 & & 3 \end{array}$$

und

$$\Sigma a_x a(a_x-a_y,3;x) = a_1^2(a_1-a_2)(a_1-a_3)+a_2^2(a_2-a_1)(a_2-a_3)+a_3^2(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

$$= (1,3;0)\Sigma a^3-2(2,3;0)\Sigma a_x^2+3\;3,3;0)\Sigma a_x^1$$

$$= \begin{array}{c|l|l|l|l|c} 1 & 111 & -\;2\text{mal} & 12 & 11 & +\;3\text{mal}\;123 & 1 \\ 2 & 222 & & 13 & 22 & & 2 \\ 3 & 333 & & 23 & 33 & & 3 \end{array}$$

§. 134.

Wir gehen zu $a(a_x+ub_y)^{-1}$ über, und bemerken zuerst, dafs

$$\frac{1}{a(a_x+ub_y;s)} = \frac{a_x+ub_s}{a(a_x+ub_y)}$$

und dafs also

421) $$a(a_x+ub_y;s)^{-1} = a_x a(a_x+ub_y)^{-1}+ub_s a(a_x+ub_y)^{-1}$$

$$x = 1,2,...,n \text{ und } y = 1,2,3,...m$$

Eben so ist

$$a'a_x+ub_y;h)^{-1} = a_x a(a_x+ub_y)^{-1}+ub_h a(a_x+ub_y)^{-1}$$

Werden be de Gleichungen von einander abgezählt, so wird

422) $$a(a_x+ub_y;s)^{-1}-a(a_x+ub_y;h)^{-1} = u(b_s-b_h)a(a_x+ub_y)^{-1}$$

Vervielfachen wir beide Gleichungen mit a_x^p, und nehmen die Summe aller Producte, welche die n Werthe von x zulassen, so erhalten wir die Gleichungen

423) $$\Sigma a_x^p a\;a_x+ub_y;s)^{-1} = \Sigma a_x^{p+1} a(a_x+ub_y^{s})^{-1}+ub_s\Sigma a_x^p a(a_x+ub_y)^{-1}$$

und

424) $$\Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;h)^{-1} = u(b_s - b_h)\Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$

wovon die erstere die zurücklaufende Bildungsweise der Summen der Producte enthält. Wir können diese auf drei verschiedene Weisen weiter ausführen, und zwar indem wir entweder die Gleichungen

$$\Sigma a_x^{p+1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - ub_s \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$
$$\Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - ub_s \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$
. . . . . .
$$\Sigma a_x^{p-q+1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^{p-q} \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - ub_s \Sigma a_x^{p-q} \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$

oder die Gleichungen

$$\Sigma a_x^{p+1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - ub_s \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$
$$\Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y;s+1)^{-1} - ub_{s+1} \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$
$$\Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^{p-2} \alpha(a_x+ub_y;s+2)^{-1} - ub_{s+2} \Sigma a_x^{p-2} \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$
. . . . . .
$$\Sigma a_x^{p-q+1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^{p-q} \alpha(a_x+ub_y;s+q)^{-1} - ub_{s+q} \Sigma a_x^{p-q} \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$

oder die Gleichungen

$$\Sigma a_x^{p+1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - ub_s \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$
$$\Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} = \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1)^{-1} - ub_{s+1} \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1}$$
$$\Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1)^{-1} = \Sigma a_x^{p-2} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1,s+2)^{-1} - ub_{s+2} \Sigma a_x^{p-2} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1)^{-1}$$
. . . . . .
$$\Sigma a_x^{p-q} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1,\ldots,s+q)^{-1} = \Sigma a_x^{p-q-1} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1,\ldots,s+q+1)^{-1} - ub_{s+q+1} \Sigma a_x^{p-q-1} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1,\ldots,s+q)^{-1}$$

verbinden; wir erhalten folgende Reihen:

425) $$\Sigma a_x^{p+1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - u^1 b_s^1 \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1}$$
$$+u^2 b_s^2 \Sigma a_x^{p-2} \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - \ldots (-)^m u^m b_s^m \Sigma a_x^{p-m} \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1}$$
$$+(-)^{m+1} u^{m+1} b_s^{m+1} \Sigma a_x^{p-m} \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$$

und

426) $= \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1} - u^1 b_s \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y;s+1)^{-1}$

$+u^2 b_s b_{s+1} \Sigma a_x^{p-2} \alpha(a_x+ub_y;s+2)^{-1} - u^3 b_s b_{s+1} b_{s+2} \Sigma a_x^{p-3} \alpha(a_x+ub_y;s+3)^{-1} + \ldots$

$\ldots (-)^q u^q b_s b_{s+1} \ldots b_{s+q-1} \Sigma a_x^{p-q} \alpha(a_x+ub_y;s+q)^{-1} +$

$(-)^{q+1} u^{q+1} b_s b_{s+1} \ldots\ldots b_{s+q} \Sigma a_x^{p-q} \alpha(a_x+ub_y)^{-1}$

und

427) $\Sigma a_x^{p+1} \alpha(a_x+ub_y)^{-1} = -ub_s \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y)^{-1} - ub_{s+1} \Sigma a_x^{p-1} \alpha(a_x+ub_y;s)^{-1}$

$-ub_{s+2} \Sigma a_x^{p-2} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1)^{-1} - ub_{s+3} \Sigma a_x^{p-3} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1,s+2)^{-1} - \ldots$

$\ldots - ub_{s+q+1} \Sigma a_x^{p-q-1} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1,\ldots,s+q)^{-1}$

$+\Sigma a_x^{p-q-1} \alpha(a_x+ub_y;s,s+1,\ldots,s+q+1)^{-1}$

In allen diesen Gleichungen können x und y eine gleiche Anzahl Werthe haben, oder eine ungleiche, nämlich $x = 1,2,\ldots n$ und $y = 1,2,\ldots m$.

Ferner ist hierbei wohl zu bemerken, dafs keine dieser Gleichungen gestört wird, wenn in allen Producten ein, oder wenn mehrere Factoren ausgeschlossen werden; so ist nach 421

428) $\alpha(a_x+ub_y;k,s)^{-1} = a_x \alpha(a_x+ub_y;k)^{-1} + ub_s \alpha(a_x+ub_y;k)^{-1}$

und nach 422

429) $\alpha(a_x+ub_y;k,s)^{-1} - \alpha(a_x+ub_y;k,h)^{-1} = u(b_s-b_h)\alpha(a_x+ub_y;k)^{-1}$

also auch nach 423

430) $\Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;k,s)^{-1} = \Sigma a_x^{p+1} \alpha(a_x+ub_y;k)^{-1} + ub_s \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;k)^{-1}$

und nach 424

431) $\Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;k,s)^{-1} - \Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;k,h)^{-1} = u(b_s-b_h)\Sigma a_x^p \alpha(a_x+ub_y;k)^{-1}$

Auf gleiche Art werden auch die Gleichungen 425, 426, 427 erweitert.

§. 135.

Einer der merkwürdigsten Fälle ist $u = -1$. Wir erhalten für diesen besondern Werth von u folgende Gleichungen aus 428

432) $a(a_x - a_y, n; x, x)^{-1} = o$ also auch $\Sigma a(a_x - a_y, n; x, x)^{-1} = o$

aus 430

433) $\Sigma a_x^p a(a_x - a_y, n; x, s)^{-1} = \Sigma a_x^{p+1} a(a_x - a_y, n; x)^{-1} - a_s \Sigma a_x^p a(a_x - a_y, n; x)^{-1}$

und aus 431

434) $\Sigma a_x^p a(a_x - a_y, n; x, s)^{-1} - \Sigma a_x^p a(a_x - a_y, n; x, h)^{-1} = (a_h - a_s)\Sigma a_x^p a(a_x - a_y, n; x)^{-1}$

Wir gehen nun von dem einfachsten Fall aus, wo $p = o$ ist, und setzen $s = 1$ und $h = 2$; wir können hierbei, da b nicht mehr vorkommt, die Bezeichnung vereinfachen und $x - y$ statt $a_x - a_y$ setzen, so dafs

435) $\Sigma a(x - y, n; x, 1)^{-1} - \Sigma a(x - y, n; x, 2)^{-1} = (a_2 - a_1)\Sigma a(x - y, n; x)^{-1}$

Nach diesem geben wir dem n die verschiedenen Werthe $1, 2, 3, 4, \ldots$, und finden, dafs

436) $\Sigma a(x - y, 1; x)^{-1} = 1$ und $\Sigma a(x - y, 2; x)^{-1} = o$

Bei $n = 3$ bemerken wir, dafs, da nach 432 $a(1 - y, 3; 1, 1)^{-1} = o$ ist,

$$\Sigma a(x - y, 3; x, 1)^{-1} = a(2 - y, 3; 2, 1)^{-1} + a(3 - y, 3; 3, 1)^{-1}$$

ist, und dafs diese Summe nur zwei Elemente enthalt, und folglich nach 436 verschwindet; eben so kommen, da $a(2 - y, n; 2, 2)^{-1} = o$ ist, in der Summe

$$\Sigma a(x - y, 3; x, 2)^{-1} = a(1 - y, 3; 1, 2)^{-1} + a(3 - y, 3; 3, 2)^{-1}$$

nur zwei Elemente vor, sie verschwindet gleichfalls nach 436; da nun nach 435

$$\Sigma a(x - y, 3; x, 1)^{-1} - \Sigma a(x - y, 3; x, 2)^{-1} = (a_2 - a_1)\Sigma a(x - y, 3; x)^{-1}$$

ist, so ist auch

437) $$\Sigma a(x - y, 3; x)^{-1} = o$$

Jede der Summen $\Sigma a(x - y, 4; x, 1)^{-1}$ und $\Sigma a(x - y, 4; x, 2)^{-1}$ besitzt nur drei Elemente; jede dieser Summen ist nach vorstehender Gleichung $= o$, und da nach 435

$$\Sigma a(x - y, 4, x, 1)^{-1} - \Sigma a(x - y, 4, x, 2) = (a_2 - a_1)\Sigma a(x - y, 4; x)^{-1}$$

ist, so ist auch

438) $$\Sigma a(x-y,4;x)^{-1} = o$$

Indem wir auf diesem Wege weiter gehen, finden wir, dafs allgemein, wenn n grösser als 1 ist,

439) $$\Sigma a(x-y,n;x)^{-1} = o$$

§. 136.

Die Gleichung 433 führt uns jetzt weiter, und zwar zu den Reihen, in welchen die Producte mit den Potenzen der Elemente verbunden sind, Wir setzen zuerst $p = o$, und finden, dafs

$$\Sigma a_x^1 a(x-y,n;x)^{-1} = \Sigma a(x\ \ y,n;x,1)^{-1}+a_1\Sigma a(x\ \ y,n;x)^{-1}$$

Da nun, wenn $n > 1$ ist, $\Sigma a(x-y,n;x)^{-1} = o$

und wenn $n > 2$ ist, $\Sigma a(x-y,n;x,1)^{-1} = o$

so ist auch

440) $$\Sigma a_x^1 a(x-y,n;x)^{-1} = o \text{ wenn } n > 2 \text{ ist}$$

Die Gleichung

$$\Sigma a_x^2 a(x-y,n;x)^{-1} = \Sigma a_x^1 a(x-y,n\ x,1)^{-1}+a_1\Sigma a_x^1 a(x-y,n\ x)^{-1}$$

führt, da $\Sigma a_x^1 a(x-y,n;x)^{-1} = o$, wenn $n > 2$

und $\Sigma a_x^1 a(x-y,n\ x,1)^{-1} = o$, wenn $n > 3$

ist, zu der Gleichung

441) $$\Sigma a_x^2 a(x-y,n;x)^{-1} = o, \text{ wenn } n > 3 \text{ ist.}$$

Eben so finden wir, dafs, da

$$\Sigma a_x^3 a(x-y,n;x)^{-1} = \Sigma a_x^2 a(x-y,n;x,1)^{-1}+a_1\Sigma a_x^2 a(x-y,n;x)^{-1}$$

$$\Sigma a_x^2 a(x-y,n\ x)^{-1} = o, \text{ wenn } n > 3$$

und $$\Sigma a_x^2 a(x-y,n;x,1)^{-1} = o, \text{ wenn } n > 4$$

ist, dafs auch

442) $$\Sigma a_x^3 a(x-y,n;x)^{-1} = o, \text{ wenn } n > 4 \text{ ist.}$$

Ueberhaupt finden wir auf diesem Wege, dafs

443) $$\Sigma a_x^p a(x-y,n;x)^{-1} = 0, \text{ wenn } n > p+1 \text{ ist.}$$

§. 137.

Für die übrigen Werthe von p giebt die Gleichung 427 Aufschlufs; wir setzen in dieser $s = 1$ und $p = p-1$, wodurch sie in folgende übergeht

444) $$\Sigma a_x^p a(x-y,n;x)^{-1} = a\,\Sigma a_x^{p-1} a(x-y,n;x)^{-1} + a_2 \Sigma a_x^{p-2} a(x-y,n;x,1)^{-1}$$
$$+ a_3 \Sigma a_x^{p-3} a(x-y,n;x,1,2)^{-1} + a_4 \Sigma a_x^{p-4} a(x-y,n;x,1,2,3)^{-1} + \ldots$$
$$+ a_{n-1} \Sigma a_x^{p-n+1} a(x-y,n;x,1,2,3,\ldots,n-2)^{-1} + \Sigma a_x^{p-n+1} a(x-y,n;x,1,2,\ldots,n-1)^{-1}$$

und bemerken, dafs, wenn $p = n-1$ ist, jede Summe, welche in dieser Reihe vorkommt, verschwindet, ausser der letzten Summe, welche nach 436

$$\Sigma a_x^0 a(x-y,n;x,1,2,\ldots,n-1)^{-1} = 1$$

ist. Es ist also

445) $$\Sigma a_x^{n-1} a(x-y,n;x)^{-1} = 1$$

Ist ferner $p = n$, so werden nach vorstehender Gleichung die Summen, welche mit $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ verbunden sind, $= 1$, und die letzte Summe, da sich in ihr nur ein Element a_n befindet

$$\Sigma a_x^1 a(x-y,n;x,1,2,\ldots,n-1)^{-1} = a_n$$

Es ist daher

446) $$\Sigma a_x^n a(x-y,n;x)^{-1} = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n = [1,n;0]$$

Ist $p = n+1$, so wird aus 444

$$\Sigma a_x^{n+1} a(x-y,n;x)^{-1} = a\,\Sigma a^n a(x-y,n;x)^{-1} + a_2 \Sigma a_x^{n-1} a(x-y,n;x,1)^{-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1} \Sigma a_x^2 a(x-y,n;x,1,2,\ldots,n-2)^{-1} + \Sigma a_x^2 a(x-y,n;x,1,2,\ldots,n-1)^{-1}$$

und nach 446

$$= a_1[1,n;0] + a_2[1,n;1] + a_3[1,n;1,2] + \ldots + a_n[1,n;1,2,\ldots,n-1]$$

denn die letzte Summe $\Sigma a_x^2 a(x-y,n;x,1,2,\ldots,n-1)^{-1} = a_n.a_n$.

Es ist folglich nach 405

447) $$\Sigma a_x^{n+1} a(x-y,n;x)^{-1} = [2,n;0]$$

Eben so ist für $p = n+2$ nach 444, 447 und 405

$$\Sigma a_x^{n+2} a(x-y,n;x)^{-1} = a_1[2,n;0]+a_2[2,n;1]+a_3[2,n;1,2]+ \ldots$$

$$\ldots +a_n[2,n;1,2,\ldots,n-1] = [3,n;0]$$

Wir finden auf diesem Wege, dafs allgemein

448) $$\Sigma a_x^{n+m} a(x-y,n;x)^{-1} = [m+1,n;0]$$

oder $$\Sigma a_x^{p} a(x-y,n;x)^{-1} = [p-n+1,n;0]$$

In dieser Gleichung sind alle frühere enthalten, denn, ist $p = n-1$, so ist $[0,n;0] = 1$.

§. 138.

Um die Summe zu finden, wenn p verneint ist, nehmen wir an, die Elemente seyen Brüche, nämlich

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}$$

Ein Beistrich neben a zeige dieses an, so dafs

$$a'(x-y,n;x) = \left\{\frac{1}{a_x}-\frac{1}{a_1}\right\}\left\{\frac{1}{a_x}-\frac{1}{a_2}\right\}\ldots\left\{\frac{1}{a_x}-\frac{1}{a_n}\right\}$$

$$= \frac{(-)^{n-1}(a_x-a_1)(a_x-a_2)\ldots(a_x-a_n)}{a_x^{n-2}.a_1a_2a_3\ldots a_n}$$

Es ist also

$$a_1a_2a_3\ldots a_n.a_x^{n-2}.a(x-y,n;x)^{-1} = (-)^{n-1}a'(x-y,n;x)^{-1}$$

und

$$a_1a_2a_3\ldots a_n.\Sigma a_x^{n-p-2}a(x-y,n;x)^{-1} = (-)^{n-1}\Sigma\left\{\frac{1}{a_x}\right\}^n a'(x-y,n;x)^{-1}$$

Die letzte Summe ist aber nach 448 $= [p-n+1,n;o]$ aus den Elementen $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$. Es ist daher

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \Sigma a_x^{n-p-2} \alpha(x-y,n;x)^{-1} = (-)^{n-1}[p-n+1,n;o]$$

oder wenn wir $p = n+p-2$ setzen,

449) $$\Sigma a_x^{-p} \alpha(x-y,n;x)^{-1} = \frac{(-)^{n-1}[p-1,n;o]}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

wo die Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ gebildet werden müssen.

Setzen wir $a_1+u, a_2+u, \ldots, a_n+u$ statt $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, so bleibt $\alpha(x-y,n;x)$ unverändert, denn $+u-u = o$; allein $[p-n+1,n;o]$ und $[p-1,n;o]$ erhalten andere Elemente; es ist nämlich nach 448

450) $$\Sigma(a_x+u)^p \alpha(x-y,n;x)^{-1} = [p-n+1,n;o]$$

aus den Elementen $a_1+u, a_2+u, \ldots, a_n+u$

und

451) $$\Sigma(a_x+u)^{-p} \alpha(x-y,n;x)^{-1} = \frac{(-)^{n-1}[p-1,n;o]}{(a_1+u)(a_2+u)\ldots(a_n+u)}$$

aus den Elementen $\frac{1}{a_1+u}, \frac{1}{a_2+u}, \ldots, \frac{1}{a_n+u}$

§. 139.

Wir gehen jetzt zu zusammengesetzten Reihen über, und zwar zuerst zu Producten verbunden mit den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, nämlich

$$\frac{a_1(q,n;1)}{a(1-y,n;1)} + \frac{a_2^p(q,n;2)}{a(2-y,n;2)} + \ldots + \frac{a_n^p(q,n;n)}{a(n-y,n;n)} = \Sigma a_x^p(q,n;x)a(x-y,n;x)^{-1}$$

Machen wir hierbei Anwendung von der Gleichung 392, so wird diese Summe auf folgende gebracht:

$$(q,n;o)\Sigma a_x^p a(x-y,n;x)^{-1} - (q-1,n;o)\Sigma a_x^{p+1} a(x-y,n;x)^{-1}$$
$$+(q-2,n;o)\Sigma a_x^{p+2} a(x-y,n;x)^{-1} - \ldots (-)^q(o,n;o)\Sigma a_x^{p+q} a(x-y,n;x)^{-1}$$

welche nach 448 in folgenden Verbindungen besteht

452) $$\Sigma a_x^p(q,n;x)a(x-y,n;x)^{-1} = (q,n,o).[p-n+1,n;o]$$
$$-(q-1,n;o).[p-n+2,n;o]+(q-2,n;o)[p-n+3,n;o] - \ldots$$
$$\ldots (-)^q(o,n;o).[p-n+q+1,n;o]$$

Diese Summe kann durch andere Producte ersetzt werden, die sich ergeben, wenn in der Gleichung 412 $p = q-n+q+1$ eingeführt wird nämlich

453) $$\Sigma a_x^p(q,n;o).a(x-y,n;x)^{-1} = (q+1,n;o).[p-n,n;o]-(q+2,n;o).[p-n-1,n;o]$$
$$+(q+3,n;o)[p-n-2,n;o] - \ldots (-)^{p-n}(q+p-n+1,n;o)[o,n;o]$$

§. 140.

Enthalten die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen mehr Elemente, als die Producte aus Factoren mit wiederkehrenden Elementen, so wird die Summe der Reihe auf gleiche Weise gefunden; es ist nach 392

$$\Sigma a_x^p(q,n+m;x)a(x-y,n;x)^{-1} = (q,n+m;o)\Sigma a_x^p a(x-y,n;x)^{-1}$$
$$-(q-1,n+m;o)\Sigma a_x^{p+1} a(x-y,n;x)^{-1} + \ldots (-)^q(o,n+m;o)\Sigma a_x^{p+q} a(x-y,n;x)^{-1}$$

und folglich nach 448

454) $$\Sigma a_x^p(q,n+m;x)a(x-y,n;x)^{-1} = (q,n+m;o).[p-n+1,n;o]$$
$$-(q-1,n+m;o)[p-n+2,n;o]+ \ldots (-)^q(o,n+m,o).[p-n+q+1,n;o]$$

oder, wenn in 413 $p = p-n+q+1$ gesetzt wird

455) $= (q+1,n+m;o)[p-n,n;o]-(q+2,n+m;o)[p-n-1,n;o]$
$+(q+3,n+m;o)[p-n-2,n;o]- \ldots (--)^{p-n}(q+p-n+1,n+m;o).[o,n;o]$
$+(-)^{p-n+1}(q+p-n+1,n+m;1,2,3,\ldots,n)$

§. 141.

Setzen wir statt der Verbindungen ohne Wiederholungen die Verbindungen mit Wiederholungen

$$\Sigma a_x^p[q,n+m;x]a(x-y,n,x)^{-1}$$

so zerlegen wir vermittelst der Gleichung

$$[q,n+m;x] = [q,n+m;o]-a_x[q-1,n+m;o]$$

die Summe in zwei Theile, und erhalten nach 448 die Gleichung

456) $$\Sigma a_x^p[q,n+m;x]a(x-y,n;x)^{-1} =$$
$$= [q,n+m;o].[p-n+1,n;o]-[q-1,n+m;o].[p-n+2,n;o]$$

§. 142.

Wir verbinden zwei Producte mit wiederkehrenden Elementen miteinander, und suchen folgende Summe

$$\Sigma a_x^p a(a_x+ua_z;x)a(a_x-a_y,n;x)^{-1}$$
$$x=y=1,2,\ldots n, \text{ und } z=1,2,\ldots,n+m$$

Wird das Product $a(a_x+ua_z;x)$ nach 1 in eine Reihe nach den Potenzen von a_x entwickelt, so bringen wir diese Summe auf folgende zurück

$$\Sigma a_x^{p+n+m-1}a(a_x-a_y,n;x)^{-1}+u^1.\Sigma a_x^{p+n+m-2}(1,n+m;x)a(a_x-a_y,n;x)^{-1}+\ldots$$
$$\ldots+u^{n+m-1}\Sigma a_x^p(n+m-1,n+m;x)a(a_x-a_y,n;x)^{-1}$$

Die Summe der vorgegebenen Reihe ist also nach 454

457) $$\Sigma a_x^p a(a_x+ua_z;x)a(a_x-a_y,n;x)^{-1} =$$
$$x=y=1,2,\ldots,n \text{ und } z=1,2,3,\ldots,n+m$$

$$= (o,n+m;o)[p+m,n;o]\{1-u^1+u^2-u^3+\ldots(-u)^{n+m-1}\}$$
$$-(1,n+m;o)[p+m-1,n;o]\{-u+u^2-u^3+\ldots(-u)^{n+m-1}\}$$
$$+(2,n+m;o)[p+m-2,n;o]\{+u^2-u^3+\ldots(-u)^{n+m-1}\}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{n+m-1}(n+m-1,n+m;o)[p-n+1,n;o].(-u)^{n+m-1}$$

Ist nun $u = 1$ und $(n+m)$ eine gerade Zahl, so ist die Summe

458) $$\Sigma a_x^2 a(x+z;x)\,a(x-y,n;x)^{-1} = (1,n+m;o)[p+m-1,n;o]$$
$x = y = 1,2,..n$ und $z = 1,2,...n+m$
$$+(3,n+m;o)[p+m-3,n;o]+(5,n+m;o)[p+m-5,n;o]+\ldots$$
$$\ldots+(n+m-1,n+m;o)[p-n+1,n;o]$$

Ist aber $n+m$ eine ungerade Zahl, so ist diese Summe

459) $$= (o,n+m;o)[p+m,n;o]+(2,n+m;o)[p+m-2,n;o]$$
$$+(4,n+m;o)[p+m-4,n;o]+\ldots+(n+m-1,n+m;o)[p-n+1,n;o]$$

Ist $u = -1$, so wird

$$a(x-z;x).a(x-y,n;x)^{-1} = (a_x-a_{n+1})(a_x-a_{n+2})\ldots(a_x-a_{n+m})$$
$$= a(a_x-a_{\ })$$
$x = 1,2,...n$; $z = n+1,n+2,..,n+m$

und für diese Werthe von x und z

460) $$\Sigma a_x^p a(a_x-a_z) = (n+m).(o,n+m;o).[p+m,n;o]$$
$$-(n+m-1).(1,n+m;o).[p+m-1,n;o]+(n+m-2).(2,n+m;o)[p+m-2,n;o]$$
$$-\ldots\ldots(-)^{n+m-1}.1.(n+m-1,n+m;o).[p-n+1,n;o]$$

§. 143.

Führen wir verschiedene Elemente in die Producte ein

$$\Sigma a_x^p a(a_x+ub_z).a(a_x-a_y,n;x)^{-1}$$
$x = y = 1,2,...n$, $z = 1,2,...m$

so wird $a(a_x+ub_z)$ in eine Reihe entwickelt

$$a_x^m+u^1a_x^{m-1}.({}^b1,m;o)+u^2a_x^{m-2}({}^b2,m;o)+\ldots+u^m a_x^o({}^bm,m;o)$$

und nun nach 448 die Summe der einzelnen Producte genommen

461) $$\Sigma a_x^p a(a_x+ub_z).a(a_x-a_y,n;x)^{-1} = [{}^ap-n+m+1,n;o]$$
$$+u^1[{}^ap-n+m,n;o].({}^b1,m;o)+u^2[{}^ap-n+m-1,n;o].({}^b2,m;o)$$
$$+\ldots+u^m[{}^ap-n+1,n;o].({}^bm,m;o)$$
wo $x = y = 1,2,...n$ und $z = 1,2,...m$

Ist p verneint, so wird die Summirung nach 451 vorgenommen.

Ist $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_m = 1$, so ist

462) $$\Sigma a_x^p.(a_x+u)^{\underline{m}}.a(a_x-a_y,n;x)^{-1} = [p-n+m+1,n;o]$$
$$+u^1k(m,2).[p-n+m,n;o]+u^2.k(m,3).[p-n+m-1,n;o]$$
$$+\ldots+u^mk(m,m+1).[p-n+1,n;o]$$

Setzen wir hierin $p = o$, und verbinden dann diese Gleichung mit der früheren 450, só erhalten wir folgende

463) $$[m-n+1,n;o] = [m-n+1,n;o]+u^1k(m,2)[m-n,n;o]$$
aus $a_1+u,a_2+u,\ldots,a_n+u$ aus $a_1,a_2,\ldots,a_n$
$$+u^2k(m,3)[m-n-1,n;o]+u^3k(m,4)[m-n-2,n;o]$$
$$+\ldots+u^{m-n+1}k(m,m-n+2)\,[o,n;o]$$

§. 144.

Werden mit der Reihe im vorigen § noch die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen verbunden, so wird die Summe

$$\Sigma a_x^p({}^aq,m;x)a(a_x+ub_z)a(a_x-a_y,n;x)^{-1}$$

auf die folgenden Summen zurückgebracht

$$\Sigma a_x^{p+m}({}^aq,m;x)a(x-y,n;x)^{-1}+u\,({}^b1,m;o)\Sigma a_x^{p+m-1}({}^aq,m;x)a(x-y,n;x)^{-1}$$
$$+u^2({}^b2,m;o)\Sigma a_x^{p+m-2}({}^aq,m;x)a(x-y,n;x)^{-1}+\ldots\ldots$$

und die Summirung nach 454 vorgenommen. Eben so wird die Summe der Reihe, wenn mit ihr die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen verbunden werden,

$$\Sigma a_x^p[{}^aq,m;x]a(a_x+ub_z)a(a_x-a_y,n;x)^{-1}$$

auf folgende Summe gebracht

$$[{}^aq,m;o]\Sigma a_x^p a(a_x+ub_z)a(a_x-a_y,n;x)^{-1}-[q-1,m;o]\Sigma a_x^{p+1}a(a_x+ub_y)a(a_x-a_y,n;x)^{-1}$$

Der Werth dieser Summen wird durch die Grössen u, p, q, m, b bestimmt, und von diesen hängt es ab, ob noch andere Umformungen der Resultate nach den früheren Gleichuugen über die geordneten Verbindungen statt finden können.

ACHTE ABHANDLUNG.

ACHTE ABHANDLUNG.

Producte aus Factoren bestehend, deren Zunahmen die Glieder der Potenzenreihe $x^a, x^{a+b}, x^{a+2b}, \ldots$ sind.

§. 145.

Das Gesetz, welches der Reihe

$$\ldots, \frac{1}{(1+ux^{a-2b})(1+ux^{a-b})}, \frac{1}{1+ux^{a-b}}, \quad 1 \quad , 1+ux^a, (1+ux^a)(1+ux^{a+b}), \ldots$$

vorgestellt durch die Zeichen

$$\ldots, \quad (1+ux^a)^{-2;b} \quad , (1+ux^a)^{-1;b}, (1+ux^a)^{0;b}, (1+ux^a)^{1;b}, \quad (1+ux^a)^{2;b} \quad , \ldots$$

zum Grunde liegt, ist folgendes: das erste Glied der Reihe bestehe aus 1 und $u \cdot x^a$, das zweite Glied werde durch Vervielfachung des ersten Gliedes mit dem Factor $1+u.x^{a+b}$, das dritte Glied durch Vervielfachung des zweiten Gliedes mit dem Factor $1+u.x^{a+2b}$ gebildet, und jedes folgende Glied enthalte einen Factor mehr, als das vorhergehende Glied, und zwar so, dafs die Stellenzahlen des x um b wachsen.

Da jedes folgende Glied gebildet wird durch Vervielfachung mit einem Factor, worin die Stellenzahl von x um b zugenommen hat, so wird umgekehrt jedes vorhergehende Glied aus dem folgenden Gliede gebildet, wenn diesem folgenden Gliede durch Messen sein letzter Factor genommen wird, daher entsteht rückwärts in der Reihe das

3te	Glied, wenn das	4te	durch $1+u.x^{1+3b}$
2te	Glied,	3te	$1+u.x^{a+2b}$
1te	Glied,	2te	$1+u.x^{a+b}$
ote	Glied,	1te	$1+u.x^a$

(-1)te Glied, ote $1+u.x^{a-b}$

(-2)te Glied, (-1)te $1+u.x^{a-2b}$

(-3)te Glied, (-2)te $1+u.x^{a-3b}$

. . . . . .

gemessen wird. Es ist daher

464) $(1+u.x^a)^{n;b} = (1+ux^a)(1+ux^{a+b}) \ldots (1+ux^{a+nb-b})$

465) $(1+u.x^a)^{o;b} = 1$

und

466) $(1+u.x^a)^{-n;b} = \frac{1}{(1+u.x^{a-b})(1+u.x^{a-2b}) \ldots (1+u.x^{a-nb})}$

§. 146.

Bevor wir zur Entwicklung dieser Producte in Reihen gehen, bemerken wir hier mehrere verschiedene Gestalten, worin diese Producte erscheinen können; es ist

467) $(1+ux^a)^{-n;b} = \frac{1}{(1+ux^{a-b})^{n;-b}} = \frac{1}{(1+ux^{a-nb})^{n;b}} = (1+ux^{a-nb-b})^{-n;-b}$

ferner

468) $(1+ux^a)^{n+m;b} = (1+ux^a)^{n;b}.(1+ux^{a+nb})^{m;b}$

Da nun auch dasselbe Product $= (1+ux^a)^{m;b}.(1+ux^{a+mb})^{n;b}$ ist, so ist überhaupt

469) $\frac{(1+ux^{a+nb})^{m;b}}{(1+ux^a)^{m;b}} = \frac{(1+ux^{a+mb})^{n;b}}{(1+ux^a)^{n;b}}$

Ferner ist

470) $\frac{(1+ux^{a+nb})^{m;-b}}{(1+ux^a)^{m;b}} = \frac{(1+ux^{a+nb})^{n-m+1;-b}}{(1+ux^a)^{n-m+1;b}}$

Wird in dieser Gleichung $a = b = 1$, $u = -1$ und $n = n - 1$ gesetzt, so geht sie in folgende über

471) $$\frac{(1-x^n)^{m;-1}}{(1-x^1)^{m;1}} = \frac{(1-x^n)^{n-m;-1}}{(1-x^1)^{n-m;1}}$$

Entwicklung von $(1+ux^a)^{n;b}$ nach den Potenzen von u.

$$(1+ux^a)^{n;b} = 1+b(n,a,b,1).u^1+b(n,a,b,2).u^2+b(n,a,b,3).u^3+\ldots$$

§. 147.

Es ist nach 1

$$(1+ux^a)^{+n;b} = 1+(1,n;o).u^1+(2,n;o).u^2+(3,n;o).u^3+\ldots$$

aus den Elementen $x^a, x^{a+b}, x^{a+2b}, \ldots, x^{a+nb-b}$

und nach 13

$$(1+ux^a)^{-n;b} = 1-[1,n;o]u^1+[2,n;o].u^2-[3,n;o].u^3+\ldots-\ldots$$

aus den Elementen $x^{a-b}, x^{a-2b}, x^{a-3b}, \ldots, x^{a-nb}$

Die unabhängige Bildungsweise der Vorzahlen von u geben nach diesem folgende Gleichungen an

472) $$b(+n,a,b,p) = (p,n;o)\ x^a, x^{a+b}, \ldots, x^{a+nb-b}$$

und

473) $$b(-n,a,b,p) = (-)^p[p,n;o]\ x^{a-b}, x^{a-2b}, \ldots, x^{a-nb}$$

Das Bilden aller möglichen geordneten Verbindungen sowohl ohne als mit Wiederholungen aus den vorstehenden Elementen ist sehr mühsam; wir können auf folgende Weise das Geschäft erleichtern.

Wir setzen vorerst $a = b = 1$ und

$$\frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)(x^{n-2}-1)\ldots(x^{n-p+1}-1)}{(x^1-1)(x^2-1)(x^3-1)\ldots(x^p-1)} = \delta(n,p)$$

und gehen nun von der ersten Eigenschaft aller geordneten Verbindungen aus

$$(p+1,n;o) = (p+1,n-1;o)+x^n.(p,n-1;o)$$

$$x^1 \ , \ x^2 \ , \ x^3 \ , \ \ldots \ , \ x^n$$

und bemerken, dafs

$$x^n(1,n-1;o) = x^n(x^1+x^2+\ldots+x^{n-1}) = x^{n+1}.\frac{x^{n-1}-1}{x-1} = x^{n+1}\delta(n-1,1)$$

und $(2,2;o) = x^1x^2 = x^3 = x^3.\delta(2,2)$

so wie auch, dafs

$$x^3.\delta(n-1,2)+x^{n+1}\delta(n-1,1) = x^3.\delta(n,2) \quad . \quad . \quad (\alpha$$

Fangen wir nun mit $p = 1$ an, so erhalten wir zuerst aus der Gleichung

$$(2,n;o) = (2,n-1;o)+x^n(1,n-1;o)$$

in Verbindung mit der Hülfsgleichung α mit Leichtigkeit folgende Werthe

$$(2,3;o) = (2,2;o)+x^3(1,2;o) = x^3\delta(2,2)+x^4\delta(2,1) = x^3\delta(3,2)$$
$$(2,4;o) = (2,3;o)+x^4(1,3;o) = x^3\delta(3,2)+x^5\delta(3,1) = x^3\delta(4,2)$$
$$(2,5;o) = (2,4;o)+x^5(1,4;o) = x^3\delta(4,2)+x^6\delta(4,1) = x^3\delta(5,2)$$

Die Rechnung behält ihren steten Gang und ist einmal

$$(2,n-1;o) = x^3\delta(n-1,2)$$

gefunden, so giebt den nächstfolgenden Werth folgende Gleichung an

$$(2,n;o) = (2,n-1;o)+x^n(1,n-1;o) = x^3\delta(n-1,2)+x^{n+1}\delta(n-1,1) = x^3\delta(n,2)$$

In der obersten Gleichung für die geordneten Verbindungen setzen wir jetzt $p = 2$

$$(3,n;o) = (3,n-1;o)+x^n(2,n-1;o)$$

und erhalten durch die Hülfsgleichung

$$x^6\delta(n-1,3)+x^{n+3}\delta(n-1,2) = x^6\delta(n,3) \quad . \quad . \quad (\beta$$

folgende Werthe

$$(3,4;o) = (3,3;o)+x^4(2,3;o) = x^6+x^7\delta(3,2) = x^6\delta(4,3)$$
$$(3,5;o) = (3,4;o)+x^5(2,4;o) = x^6\delta(4,3)+x^8\delta(4,2) = x^6\delta(5,3)$$
$$(3,6;o) = (3,5;o)+x^6(2,5;o) = x^6\delta(5,3)+x^9\delta(5,2) = x^6\delta(6,3)$$

Indem wir mit dieser Rechnung fortfahren, erhalten wir den Werth von

$$(3,n-1;o) = x^6\mathfrak{d}(n-1,3)$$

und gehen vermittelst der Gleichung

$$(3,n;o) = (3,n-1;o)+x^n(2,n-1;o) = x^6\mathfrak{d}(n-1,3)+x^{n+3}\mathfrak{d}(n-1,2)$$

zu dem folgenden Werthe

$$(3,n;o) = x^6\mathfrak{d}(n,3)$$

Der Gang der Rechnung bleibt für die späteren Werthe von p stet und unabänderlich, und führt deshalb zu gleichgebildeten Resultaten. Ist einmal

$$(p-1,n;o) = x^{\frac{1}{2}p(p-1)}.\mathfrak{d}(n,p-1)$$

gefunden, so giebt die Gleichung

$$(p,n;o) = (p,n-1;o)+x^n(p-1,n-1;o)$$

verbunden mit der Hülfsgleichung

$$x^{\frac{1}{2}p(p+1)}\mathfrak{d}(n-1,p)+x^{n+\frac{1}{2}p(p-1)}\mathfrak{d}(n-1,p-1) = x^{\frac{1}{2}p(p+1)}\mathfrak{d}(n,p)$$

die Werthe für p; indem wir nämlich p+1, p+2, p+3, . . . statt n setzen, erhalten wir

$$(p,p+1;o) = x^{\frac{1}{2}p(p+1)}\mathfrak{d}(p+1,p)$$

$$(p,p+2;o) = x^{\frac{1}{2}p(p+1)}\mathfrak{d}(p+2,p)$$

. . . . . .

und zuletzt

474)
$$(p,n;o) = x^{\frac{1}{2}p(p+1)}\mathfrak{d}(n,p)$$

$x^1, x^2, \ldots, x^n$

Wird in dieser Gleichung x^b statt x gesetzt, und die Gleichung durch $x^{p(a-b)}$ vervielfacht, so entsteht die allgemeinere

475)
$$(p,n;o) = x^{p(a-b)+\frac{1}{2}p(p+1)}\cdot\frac{(x^{nb}-1)(x^{nb-b}-1)\ldots(x^{nb-pb+b}-1)}{(x^b-1)(x^{2b}-1)\ldots(x^{pb}-1)}$$

$x^a, x^{a+b}, x^{a+2b}, \ldots, x^{a+nb-b}$

$$\text{oder} = x^{p(a-b)+\frac{1}{2}p(p+1)}.\delta(x^{nb},b,p)$$

§. 148.

Auf gleiche Weise verfahren wir bei den geordneten Verbindungen mit Wiederholungen. Wir gehen hier wieder von der Bildungsweise dieser Verbindungen aus, welche die Gleichung

$$[p,n;o] = [p,n-1;o]+x^n[p-1,n;o]$$

angiebt. Wir setzen zuerst $p = 2$,

$$[2,n;o] = [2,n-1;o]+x^n[1,n;o]$$

bemerken, dafs

$$[2,1;o] = x^1x^1 = x^2 \text{ und } x^n[1,n;o] = x^{n+1}.\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n+1}\delta(n,1)$$

und nehmen die Gleichung

$$x^2\delta(n,2)+x^{n+1}\delta(n,1) = x^2\delta(n+1,2) \qquad (\delta$$

zu Hülfe. Die Rechnung, welche wir hierdurch eingeleitet haben, ist nun folgende

$$[2,2;o] = [2,1;o]+x^2[1,2;o] = x^2+x^3\delta(2,1) = x^2\delta(3,2)$$
$$[2,3;o] = [2,2;o]+x^3[1,3;o] = x^2\delta(3,2)+x^4\delta(3,1) = x^2\delta(4,2)$$
$$[2,4;o] = [2,3;o]+x^4[1,4;o] = x^2\delta(4,2)+x^5\delta(4,1) = x^2\delta(5,2)$$
. . . . . .

Ist $[2,n-1;o] = x^2\delta(n,2)$ gefunden, so ist

$$[2,n;o] = [2,n-1;o]+x^n[1,n;o] = x^2\delta(n,2)+x^{n+1}\delta(n,1) = x^2\delta(n+1,2)$$

Der folgende Werth $p = 3$ wird jetzt eingeführt,

$$[3,n;o] = [3,n-1;o]+x^n[2,n;o]$$

Wir erhalten vermittelst der Hülfsgleichung

$$x^3\delta(n+1,3)+x^{n+2}\delta(n+1,2) = x^3\delta(n+2,3)$$

folgende Werthe

$$[3,2;0] = [3,1;0]+x^2[2,2;0] = x^3+x^4\delta(3,2) = x^3\delta(4,3)$$
$$[3,3;0] = [3,2;0]+x^3[2,3;0] = x^3\delta(4,3)+x^5\delta(4,2) = x^3\delta(5,3)$$
$$[3,4;0] = [3,3;0]+x^4[2,4;0] = x^3\delta(5,3)+x^6\delta(5,2) = x^3\delta(6,3)$$
. . . . . .

Allgemein, wenn $[3,n-1;0] = x^3\delta(n+1,3)$ gefunden ist, so ist

$$[3,n;0] = [3,n-1;0]+x^n[2,n;0] = x^3\delta(n+1,3)+x^{n+2}\delta(n+1,2) = x^3\delta(n+2,3)$$

Der Gang der Rechnung bleibt sich immer gleich, und führt dadurch immer zu ähnlichen Resultaten. Der Uebergang von

$$[p-1,n;0] = x^{p-1}\delta(n+p-2,3)$$

zu $[p,n;0]$ geschieht durch die Gleichung

$$[p,n;0] = [p,n-1;0]+x^n[p-1,n;0]$$

Indem $p = 2,3,4, \ldots$ gesetzt, und die Gleichung

$$x^p\delta(n+p-2,p)+x^{n+p-1}\delta(n+p-2,p-1) = x^p\delta(n+p-1,p)$$

zu Hülfe genommen wird, ergeben sich folgende Werthe

$$[p,2;0] = x^p\delta(1+p,p)$$
$$[p,3;0] = x^p\delta(2+p,p)$$
$$[p,4;0] = x^p\delta(3+p,p)$$
. . . . .
$$[p,n-1;0] = x^p\delta(n+p-2,p)$$

und zuletzt

476) $$[p,n;0] = x^p\delta(n+p-1,p)$$
$$x^1,x^2,\ldots,x^n$$

Wird x^b statt x gesetzt, und die Gleichung durch $x^{p(a-b)}$ vervielfacht, so entsteht die allgemeinere

477) $$[p,n;0] = x^{pa}\cdot\frac{(x^{(n+p-1)b}-1)(x^{(n+p-2)b}-1)\ldots(x^{nb}-1)}{(x^b-1)(x^{2b}-1)\ldots(x^{pb}-1)}$$
$$x^a,x^{a+b},\ldots,x^{a+nb-b}$$

Wird hierin $-b$ statt b, und $a-b$ statt a gesetzt, so wird

478) $$[p,n;o]_{x^{a-b},x^{a-2b},\ldots x^{a-nb}} = x^{p(a-nb)} \cdot \frac{(x^{(n+p-1)b}-1)(x^{(n+p-2)b}-1)\ldots(x^{nb}-1)}{(x^b-1)(x^{2b}-1)\ldots(x^{pb}-1)}$$

§. 149.

Die zurücklaufenden Bestimmungen erhalten wir dadurch, dafs wir entweder den ersten oder den letzten Factor vom Producte trennen. Trennen wir den ersten Factor vom Producte, welches für jeden Werth von n gilt,

$$(1+ux^a)^{n;b} = (1+ux^a).\{1+(ux^b).x^a\}^{n-1;b}$$

setzen in die vorgegebene Reihe ux^b statt u und $n-1$ statt n, und vervielfachen die Reihe

$$1+b(n-1,a,b,1).x^b.u^1+b(n-1,a,b,2).x^{2b}.u^2+b(n-1,a,b,3).x^{3b}.u^3+\ldots.$$

mit dem getrennten Factor $1+ux^a$, so gewinnen wir durch Gleichsetzung gleichhoher Potenzen von u folgende Gleichungen

479)
$$\begin{aligned}
b(n,a,b,1) &= x^a+b(n-1,a,b,1).x^b\\
b(n,a,b,2) &= b(n-1,a,b,1).x^{a+b}+b(n-1,a,b,2).x^{2b}\\
b(n,a,b,3) &= b(n-1,a,b,2).x^{a+2b}+b(n-1,a,b,3).x^{3b}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b(n,a,b,p) &= b(n-1,a,b,p-1).x^{a+pb-b}+b(n-1,a,b,p).x^{pb}
\end{aligned}$$

Und trennen wir den letzten Factor vom Producte

$$(1+ux^a)^{n;b} = (1+ux^a)^{n-1;b}.(1+ux^{a+(n-1)b})$$

und vervielfachen die Reihe

$$1+b(n-1,a,b,1).u^1+b(n-1,a,b,2).u^2+b(n-1,a,b,3).u^3+\ldots.$$

mit dem getrennten Factor, so erhalten wir gleichfalls durch Gleichsetzung gleichhoher Potenzen von u die Gleichungen

480) $$\begin{aligned} \mathfrak{b}(n,a,b,1) &= x^{a+(n-1)b}+\mathfrak{b}(n-1,a,b,1) \\ \mathfrak{b}(n,a,b,2) &= \mathfrak{b}(n-1,a,b,1).x^{a+(n-1)b}+\mathfrak{b}(n-1,a,b,2) \\ \mathfrak{b}(n,a,b,3) &= \mathfrak{b}(n-1,a,b,2).x^{a+(n-1)b}+\mathfrak{b}(n-1,a,b,3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{b}(n,a,b,p) &= \mathfrak{b}(n-1,a,b,p-1).x^{a+(n-1)b}+\mathfrak{b}(n-1,a,b,p) \end{aligned}$$

Vereinigen wir diese Gleichungen in 479 und 480, welche die zurücklaufende Bildungsweise für jedes n enthalten, so gewinnen wir, nachdem wir n+1 statt n gesetzt haben, eine Gleichung

481) $$\mathfrak{b}\,n,a,b,p).(1-x^{pb}) = \mathfrak{b}(n,a,b,p-1).(x^{a+pb-b}-x^{a+nb})$$

welche die Bildungsweise der Vorzahl von u^p auf die Vorzahl von u^{p-1} zurückweiset.

§. 150.

Wenn wir nun die unabhängige Bildungsweise der Vorzahlen von u nicht schon vorhin gefunden hätten, so wäre durch diese Gleichung der Weg zu ihr gebahnt; denn setzen wir $p = 1,2,3,\ldots$, so ist

$$\mathfrak{b}(n,a,b,1) = \frac{x^a-x^{a+nb}}{1-x^b}$$

$$\mathfrak{b}(n,a,b,2) = \mathfrak{b}(n,a,b,1).\frac{x^{a+b}-x^{a+nb}}{1-x^{2b}} = \frac{(x^a-x^{a+nb})(x^{a+b}-x^{a+nb})}{(1-x^b)(1-x^{2b})}$$

$$\mathfrak{b}(n,a,b,3) = \mathfrak{b}(n,a,b,2).\frac{x^{a+2b}-x^{a+nb}}{1-x^{3b}} = \frac{(x^a-x^{a+nb})(x^{a+b}-x^{a+nb})(x^{a+2b}-x^{a+nb})}{(1-x^b)(1-x^{2b})(1-x^{3b})}$$

Indem wir auf diesem Wege weiter gehen, gesellen wir zu den vorigen Factoren zwei neue, in welchen die Stellenzahlen von x um b zunehmen, aber a+nb unverändert bleibt; und es ist allgemein

482) $$\begin{aligned} \mathfrak{b}(n,a,b,p) &= \frac{(x^a-x^{a+nb})(x^{a+b}-x^{a+nb})\ldots(x^{a+pb-b}-x^{a+nb})}{(1-x^b)(1-x^{2b})\ldots(1-x^{pb})} \\ &= x^{\frac{1}{2}p(2a+pb-b)}.\frac{(1-x^{nb})^{p;-b}}{(1-x^b)^{p;+b}} \end{aligned}$$

Die vollständige Entwicklung ist folglich

$$483)\quad (1+ux^{a})^{n;b} = 1+x^{a}.\frac{(1-x^{nb})^{1;-b}}{1-x^{b})^{1;+b}}.u^{1}+x^{2a+b}.\frac{(1-x^{nb})^{2;-b}}{(1-x^{b})^{2;+b}}.u^{2}+$$

$$+x^{3a+3b}.\frac{(1-x^{nb})^{3;-b}}{(1-x^{b})^{3;+b}}.u^{3}+x^{4a+6b}.\frac{(1-x^{nb})^{4;-b}}{(1-x^{b})^{4;+b}}.u^{4}+\ldots.$$

sie ist ganz allgemein, gilt sowohl für das bejahete als verneinte n, und stimmt mit den früheren 475 und 478 überein. Nehmen wir wirklich n verneint, so ist

$$484)\quad (1+ux^{a})^{-n;b} = 1-x^{a-nb}.\frac{(1-x^{nb})^{1;b}}{(1-x^{b})^{1;b}}.u^{1}+x^{2(a-nb)}.\frac{(1-x^{nb})^{2;b}}{(1-x^{b})^{2;b}}u^{2}-\ldots+..$$

Ist $a = o$ und $b = -1$, so wird aus 484

$$485)\quad \frac{1}{(1+ux^{1})(1+ux^{2})\ldots.(1+ux^{n})} =$$

$$= 1-x^{1}\mathfrak{d}(n,1).u^{1}+x^{2}\mathfrak{d}(n+1,2)u^{2}-x^{3}\mathfrak{d}(n+2,3)u^{3}+\ldots$$

Ist $b = +1$, so wird aus 484

$$486)\quad \frac{1}{(1+ux^{-1})(1+ux^{-2})\ldots(1+ux^{-n})} =$$

$$= 1-x^{-n}\mathfrak{d}(n,1).u^{1}+x^{-2n}\mathfrak{d}(n,2).u^{2}-x^{-3n}\mathfrak{d}(n,3).u^{3}+\ldots.$$

Wenn u, x, a, b einzeln oder mehrere zugleich verneint gesetzt werden, so können ähnliche Umformungen mit den obigen Gleichungen vorgenommen werden.

Ist $b = o$, so wird

$$487)\quad \mathfrak{b}(n,a,o,p) = k(n,p+1)$$

Setzen wir in 482 d statt a

$$\mathfrak{b}(n,d,b,p) = x^{\frac{1}{2}p(2d+pb-b)}.\frac{(1-x^{nb})^{p;-b}}{(1-x^{b})^{p;+b}}$$

und verbinden diese Gleichung mit jener, so erhalten wir die Gleichung

$$488)\quad \mathfrak{b}(n,a,b,p) = \mathfrak{b}(n,d,b,p).x^{p(a-d)}$$

Ist $d = 1$, so ist

489) $$\mathfrak{b}(n,a,b,p) = \mathfrak{b}(n,1,b,p).x^{p(a-1)}$$

Diese Gleichung führt das allgemeine Product für a auf ein besonderes für 1 zurück.

§. 151.

Das Product $$\frac{(x^{nb}-1)(x^{nb-b}-1)\ldots.(x^{nb-pb+b}-1)}{(x^{b}-1)(x^{2b}-1)\ldots.(x^{pb}-1)}$$

welches ein Hauptbestandtheil von $\mathfrak{b}(n,a,b,p)$ ist, verdient eine besondere Aufmerksamkeit. Wir haben deshalb für dasselbe das Zeichen $\mathfrak{b}(x^{nb},b,p)$ oder wenn $b = 1$ ist, das Zeichen $\mathfrak{b}(n,p)$ festgesetzt. Da dieses Product aus den geordneten Verbindungen sowohl o h n e als m i t Wiederholungen aus den Elementen $x^1,x^2,x^3,\ldots.$ entstanden ist, so können wir die Reihen, welche in der sechsten Abhandlung gefunden sind, indem wir ihnen die Elemente $a_1 = x^1$, $a_2 = x^2$, $a_3 = x^3$, . . . zum Grunde legen, vermittelst der Gleichungen 475 und 477 mit Leichtigkeit in diese Producte übertragen. Wir erhalten aus 394, wenn $s = 1$ gesetzt wird,

490) $$\mathfrak{b}(n,p) = x^{pq}\mathfrak{b}(n-q,p).\mathfrak{b}(q,0)+x^{pq-1(p+q-1)}\mathfrak{b}(n-q,p-1)\mathfrak{b}(q,1)$$
$$+x^{pq-2(p+q-2)}\mathfrak{b}(n-q,p-2).\mathfrak{b}(q,2)+x^{pq-3(p+q-3)}\mathfrak{b}(n-q,p-3).\mathfrak{b}(q,3)$$
$$+\ldots.+x^{pq-q(p+q-q)}.\mathfrak{b}(n-q,p-q).\mathfrak{b}(q,q)$$

aus 395, wenn $n = n+m$ und $s = m$ gesetzt wird,

491) $$\mathfrak{b}(n+m,p) = x^{0(m-p)}\mathfrak{b}(m-1,p)\mathfrak{b}(n,0)+x^{1(m-p)}\mathfrak{b}(m-2,p-1)\mathfrak{b}(n+1,1)$$
$$+x^{2(m-p)}\mathfrak{b}(m-3,p-2)\mathfrak{b}(n+2,2)+x^{3(m-p)}\mathfrak{b}(m-4,p-3)\mathfrak{b}(n+3,3)$$
$$+\ldots+x^{p(m-p)}\mathfrak{b}(m-p-1,0)\mathfrak{b}(n+p,p)$$

aus 411

492) $$x^{pq}.\mathfrak{b}(n+p-q-1,p) = \mathfrak{b}(n+p-1,p)\mathfrak{b}(q,0)-x^{0}\mathfrak{b}(n+p-2,p-1)\mathfrak{b}(q,1)$$
$$+x^{1}\mathfrak{b}(n+p-3,p-2)\mathfrak{b}(q,2)-x^{3}\mathfrak{b}(n+p-4,p-3)\mathfrak{b}(q,3)+x^{6}\mathfrak{b}(n+p-5,p-4)\mathfrak{b}(q,4)$$
$$-\ldots+\ldots(-)^{q}x^{\frac{1}{2}q(q-1)}\mathfrak{b}(n+p-q-1,p-q).\mathfrak{b}(q,q)$$

wo aber q kleiner als n ist. Ist $q = n$, so ist die Summe dieser Reihe $= o$.

aus 413

493) $x^{pn}.\delta(m,p) = \delta(n+m,p) - x^{-p+1}\delta(n+m,p-1).\delta(n,1)$
$+x^{-2p+3}\delta(n+m,p-2)\delta(n+1,2) - x^{-3p+6}\delta(n+m,p-3)\delta(n+2,3)$
$+ \ldots (-)^p x^{-pp+\frac{1}{2}p(p+1)}.\delta(n+m,p-p).\delta(n+p-1,p)$

aus 415

494) $\delta(n+p-q-1,p) = x^{-p}\delta(n+p-q,p) - x^{-2p+1}\delta(n+p-q,p-1)$
$+x^{-3p+3}\delta(n+p-q,p-2) - x^{-4p+6}\delta(n+p-q,p-3) + \ldots$
$\ldots (-)^q x^{-(q+1)p+\frac{1}{2}q(q+1)}.\delta(n+p-q,p-q)$

wo q kleiner als n ist.

aus 417

495) $(-)^p x^{\frac{1}{2}p(p+1)}\delta(m,p) = x^{-pq}\delta(p+q,p) - x^{-p(q+1)+1}\delta(p+q,p-1)\delta(m+q+1,1)$
$+x^{-p(q+2)+3}\delta(p+q,p-2)\delta(m+q+2,2) - x^{-p(q+3)+6}\delta(p+q,p-3).\delta(m+q+3,3)$
$+ \ldots (-)^p x^{-p(q+p)+\frac{1}{2}p(p+1)}\delta(p+q,p-p)\delta(m+q+p,p)$

§. 152.

Die Reihe 492 ist zwar in so fern ganz allgemein, als sie sowohl für das bejahete als verneinte n gilt, dehnt sich jedoch nicht auf das unendliche n aus. Für diesen Fall erlauben wir uns, im Anfange der Entwicklung des 149. §en sowohl n als $n-1 = \infty$ zu setzen, oder anzunehmen, dafs

$$(1+ux^a)^{\infty;b} = (1+ux^a).\{1+(ux^b).x^a\}^{\infty;b}$$

sey; die Gleichungen in 479 gehen hierdurch in folgende über

$$\mathfrak{b}(\infty,a,b,1) = x^a+\mathfrak{b}(\infty,a,b,1).x^b$$
$$\mathfrak{b}(\infty,a,b,2) = \mathfrak{b}(\infty,a,b,1).x^{a+b}+\mathfrak{b}(\infty,a,b,2).x^{2b}$$
$$\mathfrak{b}(\infty,a,b,3) = \mathfrak{b}(\infty,a,b,2).x^{a+2b}+\mathfrak{b}(\infty,a,b,3).x^{3b}$$
. . . . . .
$$\mathfrak{b}(\infty,a,b,p) = \mathfrak{b}(\infty,a,b,p-1).x^{a+pb-b}+\mathfrak{b}(\infty,a,b,p).x^{pb}$$

Diese zurücklaufende Bestimmung der Vorzahlen von u führt unmittelbar zu der unabhängigen, nämlich

$$\mathfrak{b}(\infty,a,b,1) = \frac{x^a}{1-x^b}$$
$$\mathfrak{b}(\infty,a,b,2) = \mathfrak{b}(\infty,a,b,1).\frac{x^{a+b}}{1-x^{2b}} = \frac{x^a.x^{a+b}}{(1-x^b)(1-x^{2b})}$$
$$\mathfrak{b}(\infty,a,b,3) = \mathfrak{b}(\infty,a,b,2).\frac{x^{a+2b}}{1-x^{3b}} = \frac{x^a.x^{a+b}.x^{a+2b}}{(1-x^b)(1-x^{2b})(1-x^{3b})}$$
. . . . . .

und

$$496)\quad \mathfrak{b}(\infty,a,b,p) = \mathfrak{b}(\infty,a,b,p-1).\frac{x^{a+pb-b}}{1-x^{pb}} = \frac{x^a x^{a+b} \ldots . x^{a+pb-b}}{(1-x^b)(1-x^{2b})\ldots(1-x^{pb})}$$

Die vollständige Entwicklung ist also

$$497)\quad (1+ux^a)(1+ux^{a+b})(1+ux^{a+2b}) \ldots . = (1+ux^a)^{\infty;b} =$$
$$= 1+\frac{x^a}{1-x^b}.u^1+\frac{x^a.x^{a+b}}{(1-x^b)(1-x^{2b})}.u^2+\frac{x^a.x^{a+b}.x^{a+2b}}{(1-x^b)(1-x^{2b})(1-x^{3b})}.u^3+\ldots$$

Setzen wir $n = -\infty$, so entsteht dieselbe Reihe; diese ist also sowohl die Entwicklung für das Product $(1+ux^a)(1+ux^{a+b})(1+ux^{a+2b}) \ldots .$ als für das Product

$$\frac{1}{(1+ux^{a-b})(1+ux^{a-2b})(1+ux^{a-3b}) \ldots .}$$

wovon jedes aus unendlich vielen Factoren besteht.

Wir lassen diese Idendität der Entwicklung in so ferne gelten, als eine Entwicklung des unendlichen Products in Reihen verlangt wird; wenn

aber Folgerungen aus der Reihe selbst gemacht werden sollen, so dürfen wir die Voraussetzung, auf welche sich diese Entwicklung gründet, nicht ausser Acht lassen.

§. 153.

Ausser der allgemeinen Entwicklung 483 finden noch mehrere andere für bestimmte Werthe von u,a,b, statt, die sich auf besondern Wegen ergeben; so finden wir z. B. aus 383, wenn wir $b_1 = -x^1$, $b_2 = -x^2$, $b_3 = -x^3$, ... und $a_1 = -x^{p+1}$, $a_2 = -x^{p+2}$, $a_3 = -x^{p+3}$, ... setzen, dafs

498) $$\delta(n+p,n) = 1+x^1.\delta(p,1)+x^2\delta(p+1,2)+x^3\delta(p+2,3)+ \ldots . \\ \ldots . +x^n\delta(n+p-1,n)$$

Ist $p = -p$ und $x = x^{-1}$, so wird aus 498

499) $$x^{\frac{1}{2}n(n+1)}\delta(p-1,n) = 1-x^0\delta(p,1)+x^1\delta(p,2)-x^3\delta(p,3) + \ldots \\ \ldots (-)^n x^{\frac{1}{2}n(n-1)}\delta(p,n)$$

§. 154.

Zu einer zweiten besondern Entwicklung führen folgende zwei Gleichungen

$$\delta(n,q).(1-x^{n+1}) = \delta(n+1,q)+\delta(n+1,q+1)-\delta(n+2,q+1)$$
$$\text{und } 1-x = \delta(2,0)-\delta(2,1)+\delta(2,2)$$

Vervielfachen wir die zweite Gleichung durch $1-x^3$, so ist

$$\delta(2,0)(1-x^3) = \delta(3,0)+\delta(3,1)-\delta(4,1)$$
$$-\delta(2,1)(1-x^3) = -\delta(3,1)-\delta(3,2)+\delta(4,2)$$
$$\delta(2,2)(1-x^3) = \delta(3,2)+\delta(3,3)-\delta(4,3)$$

Zählen wir diese Gleichungen zusammen, und setzen $\delta(4,0)$ und $\delta(4,4)$ statt $\delta(3,0)$ und $\delta(3,3)$, so wird

$$(1-x^1)(1-x^3) = \delta(4,0)-\delta(4,1)+\delta(4,2)-\delta(4,3)+\delta(4,4)$$

Vervielfachen wir diese Gleichung mit $1-x^5$, setzen nach der ersten Gleichung

$$\begin{aligned}
\delta(4,0).(1-x^5) &= +\delta(5,0)+\delta(5,1)-\delta(6,1)\\
-\delta(4,1).(1-x^5) &= -\delta(5,1)-\delta(5,2)+\delta(6,2)\\
+\delta(4,2).(1-x^5) &= +\delta(5,2)+\delta(5,3)-\delta(6,3)\\
-\delta(4,3).(1-x^5) &= -\delta(5,3)-\delta(5,4)+\delta(6,4)\\
+\delta(4,4)(1-x^5) &= +\delta(5,4)+\delta(5,5)-\delta(6,5)
\end{aligned}$$

und setzen $\delta(6,0)$ und $\delta(6,6)$ statt $\delta(5,0)$ und $\delta(5,5)$, so erhalten wir durch Zuzählen die Gleichung

$$(1-x^1)(1-x^3)(1-x^5) = \delta(6,0)-\delta(6,1)+\delta(6,2)-\delta(6,3)+\delta(6,4)-\delta(6,5)+\delta(6,6)$$

Wir finden allgemein, dafs

500) $$(1-x^1)^{1,2} = \delta(2n,0)-\delta(2n,1)+\delta(2n,2)-\delta(2n,3)+\ldots+\delta(2n,2n)$$

Diese Reihe gilt nicht allein für das bejahete, sondern auch für das verneinte n, welches sich auf folgende Art bewährt; es ist

$$\frac{1}{1-x^{-1}} = 1-\frac{1-x^{-2}}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^{-2}}$$

$$\frac{1}{1-x^{-2}} = 1-\frac{1-x^{-3}}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^{-3}}$$

$$\frac{1}{1-x^{-3}} = 1-\frac{1-x^{-4}}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^{-4}}$$

. . . . . .

also

$$\frac{1}{1-x^{-1}} = 1-\frac{1-x^{-2}}{1-x}+\frac{(1-x^{-2})(1-x^{-3})}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{(1-x^{-2})(1-x^{-3})(1-x^{-4})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\ldots$$

oder

$$\frac{1}{1-x^{-1}} = \delta(-2,0)-\delta(-2,1)+\delta(-2,2)-\delta(-2,3)+\ldots.$$

Bemerken wir nun, dafs

$$\frac{\mathfrak{d}(-n+1,q)}{1-x^{-n}} = -\mathfrak{d}(-n-1,q-1)+\frac{\mathfrak{d}(-n,q-1)}{1-x^{-n}}+\frac{\mathfrak{d}(-n,q)}{1-x^{-n}}$$

so erhalten wir durch Messen der vorstehenden Reihe durch $1-x^{-3}$ und durch Zuzählen der Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{d}(-2,0)}{1-x^{-3}} = +\frac{\mathfrak{d}(-3,0)}{1-x^{-3}}$$

$$-\frac{\mathfrak{d}(-2,1)}{1-x^{-3}} = +\mathfrak{d}(-4,0)-\frac{\mathfrak{d}(-3,0)}{1-x^{-3}}-\frac{\mathfrak{d}(-3,1)}{1-x^{-3}}$$

$$+\frac{\mathfrak{d}(-2,2)}{1-x^{-3}} = -\mathfrak{d}(-4,1)+\frac{\mathfrak{d}(-3,1)}{1-x^{-3}}+\frac{\mathfrak{d}(-3,2)}{1-x^{-3}}$$

$$-\frac{\mathfrak{d}(-2,3)}{1-x^{-3}} = +\mathfrak{d}(-4,2)-\frac{\mathfrak{d}(-3,2)}{1-x^{-3}}-\frac{\mathfrak{d}(-3,3)}{1-x^{-3}}$$

. . . . . ,

folgende Reihe

$$\frac{1}{(1-x^{-1})(1-x^{-3})} = \mathfrak{d}(-4,0)-\mathfrak{d}(-4,1)+\mathfrak{d}(-4,2)-\ldots$$

Dieser Weg führt zu der allgemeinen Gleichung

501) $$\frac{1}{(1-x^{-1})(1-x^{-3})\ldots\ldots(1-x^{-2n-1})} = (1-x^{1})^{-n;2} =$$

$$= \mathfrak{d}(-2n,0)-\mathfrak{d}(-2n,1)+\mathfrak{d}(-2n,2)-\mathfrak{d}(-2n,3)+\ldots.$$

welche entsteht, wenn in 500 $-n$ statt n gesetzt wird.

Eine dritte besondere Entwicklung ist folgende:

$$1+x^{1} = 1+x^{1}\cdot\frac{x^{2}-1}{x^{2}-1}$$

$$(1+x^{1})(1+x^{2}) = 1+x^{2}+x^{1}(1+x^{2}) = 1+x^{1}(x^{2}+1)+x^{2}$$

$$= 1+x^{1}\cdot\frac{x^{4}-1}{x^{2}-1}+x^{2}\cdot\frac{(x^{4}-1)(x^{2}-1)}{(x^{2}-1)(x^{4}-1)}$$

und allgemein

502) $(1+x^1)^{n;1} = 1+x^1\mathfrak{d}(x^{2n},2,1)+x^2\mathfrak{d}(x^{2n},2,2)+x^3\mathfrak{d}(x^{2n},2,3)+\ldots+x^n.\mathfrak{d}(x^{2n},2,n)$

Der Uebergang von dem vorhergehenden Producte

$(1+x^1)^{n-1;1} = 1+x^1\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,1)+x^2\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,2)+\ldots+x^{n-1}\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,n-1)$

zum nächstfolgenden $(1+x^1)^{n;1}$ besteht in dem Vervielfachen dieser Reihe mit dem Factor $1+x^n$, und zwar so, dafs die vorstehende Reihe mit 1 vervielfacht, und die umgekehrte Reihe

$$(1+x^1)^{n-1;1} = x^{n-1}\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,n-1)+x^{n-2}\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,n-2)+\ldots$$

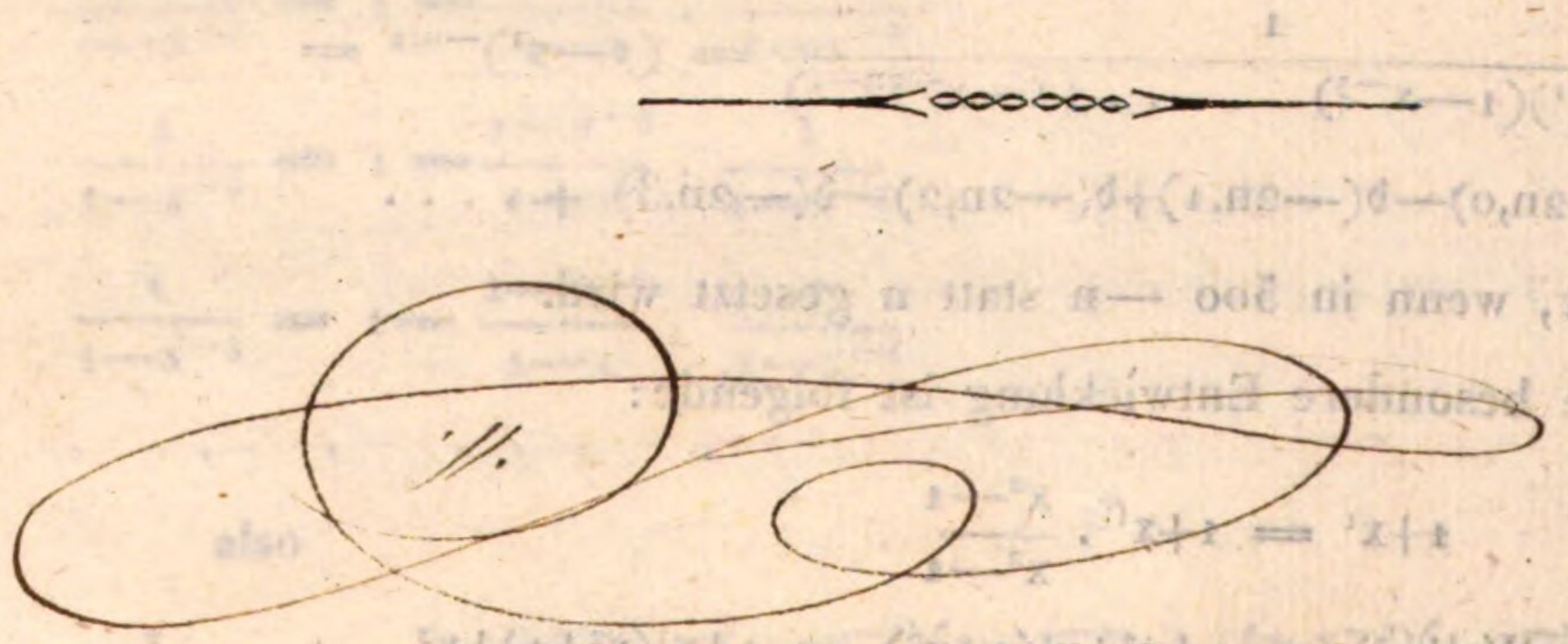
mit x^n vervielfacht wird; die Vereinigung der beiden Reihen

$$1+x^1\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,1)+x^2\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,2)+\ldots\ldots\ldots+x^p\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,p)+\ldots.$$
$$x^{2n-1}\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,n-1)+x^{2n-2}\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,n-2),\ldots+x^{2n-p}\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,n-p)+\ldots$$

geschieht nun vermittelst der Gleichung

$$x^1\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,p)+x^{2n-p}\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,n-p) = x^p\mathfrak{d}(x^{2n-2},,p)+x^{2n-p}\mathfrak{d}(x^{2n-2},2,p-1)$$
$$= x^p\mathfrak{d}(x^{2n},2,p)$$

wodurch die Reihe 502 entsteht, welche nur für das bejahete n gilt.



NEUNTE ABHANDLUNG.

NEUNTE ABHANDLUNG.

Summirung der Reihen.

I. Abtheilung.

$$(1+a_1|p).1^{n|1}+(2+a_1|p).2^{n|1}+(3+a_1|p).3^{n|1}+\ldots+(x+a_1|p).x^{n|1}$$

§. 155.

Es ist bekannt, dafs

$$1+2+3+4+\ldots+x = \frac{x(x+1)}{1\,.\,2}$$

Die Reihe und die Summe derselben kann so dargestellt werden

503) $$\Sigma x^{1|1} = \tfrac{1}{2}\,.\,x^{2|1}$$

Werden die Glieder dieser Reihe nach ihrer Folge mit 2,3,4,...,n+1 verbunden, so entsteht eine Reihe

$$1.2+2.3+3.4+\ldots+x(x+1) = \Sigma x^{2|1}$$

in welcher jedes Glied aus zweien Factoren besteht. Diese zusammengesetztere Reihe kann in folgende (x+1) einfachere Reihen zerlegt werden

$$\begin{array}{l} 1+2+3+4+\ldots+x \\ 1+2+3+4+\ldots+x \\ \quad 2+3+4+\ldots+x \\ \quad\quad 3+4+\ldots+x \\ \quad\quad\quad 4+\ldots+x \\ \quad\quad\quad\quad \ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad \ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad x \end{array}$$

wovon nur die beiden ersten vollständig sind. Wenn alle Reihen vollständig wären, so wäre die Summe der ersten Reihe $(x+1)$mal vorhanden; der dritten und jeder folgenden Reihe fehlen aber mehrere Glieder; nach 503 ist die Summe der fehlenden Glieder in der dritten Reihe $= \frac{1}{2} \cdot 1^{2|1}$, in der vierten Reihe $= \frac{1}{2} \cdot 2^{2|1}$, in der fünften Reihe $= \frac{1}{2} \cdot 3^{2|1}$, ... und in der letzten Reihe $= \frac{1}{2} \cdot (x-1)^{2|1}$. Die Summe aller Reihen ist also

$$(x+1)\Sigma x^{1|1} - \tfrac{1}{2}\{1^{2|1}+2^{2|1}+3^{2|1}+ \ldots +(x-1)^{2|1}\}.$$

Wird zu dieser Summe $x^{2|1}$ zu- und wieder abgezählt, so ist

$$\Sigma x^{2|1} = (x+1)\Sigma x^{1|1} + \tfrac{1}{2}x^{2|1} - \tfrac{1}{2}\Sigma x^{2|1} = \tfrac{1}{2}x^{3|1} - \tfrac{1}{2}\Sigma x^{2|1}$$

und folglich

504) $$\Sigma x^{2|1} = \tfrac{1}{3} \cdot x^{3|1}$$

Eben so wird die Summe der Reihe gefunden

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+ \ldots +x(x+1)(x+2) = \Sigma x^{3|1}$$

welche aus der vorhergehenden entspringt, wenn die Glieder nach ihrer Folge mit 3,4,5, . . . , $x+2$ vervielfacht werden. Sie wird zuerst in mehrere Reihen zerlegt

$$\begin{aligned}
&1.2+2.3+3.4+ \ldots +x(x+1)\\
&1.2+2.3+3.4+ \ldots +x(x+1)\\
&1.2+2.3+3.4+ \ldots +x(x+1)\\
&2.3+3.4+ \ldots +x(x+1)\\
&3.4+ \ldots +x(x+1)\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\\
&x(x+1)
\end{aligned}$$

Wären alle Reihen vollständig, so wäre ihre Summe $(x+2)\Sigma x^{2|1}$; da aber in der vierten und jeder folgenden Reihe die ersteren Glieder fehlen, so müssen die Summen derselben abgezählt werden. Diese Summen entstehen aus N. 504, wenn $1,2,3,\ldots,x-1$ statt x eingeführt werden, nämlich

$$\tfrac{1}{3}\{1^{3|1}+2^{3|1}+3^{3|1}+\ldots+(x-1)^{3|1}\}$$

oder wenn $\frac{1}{3}x^{3|1}$ zu- und abgezählt wird,

$$\tfrac{1}{3}(1^{3|1}+2^{3|1}+\ldots+x^{3|1})-\tfrac{1}{3}x^{3|1} = -\tfrac{1}{3}x^{3|1}+\tfrac{1}{3}\Sigma x^{3|1}$$

Dieses ist die Summe der fehlenden Glieder, und also die Summe der vorgegebenen Reihe

$$\Sigma x^{3|1} = (x+2)\Sigma x^{2|1}+\tfrac{1}{3}x^{3|1}-\tfrac{1}{3}\Sigma x^{3|1} = \tfrac{1}{3}x^{4|1}-\tfrac{1}{3}\Sigma x^{3|1}$$

oder

505) $$\Sigma x^{3|1} = \tfrac{1}{4}\cdot x^{4|1}$$

Die Bildung der folgenden Reihe und ihrer Summe behält den einmal angenommenen Gang; ist

$$\Sigma x^{n-1|1} = \tfrac{1}{n}\cdot x^{n|1}$$

gefunden, so ist die Summe der unmittelbar folgenden Reihe $(x+n-1)$mal die Summe der vorigen Reihe, weniger der Reihe

$$\tfrac{1}{n}\{1^{n|1}+2^{n|1}+\ldots+(x-1)^{n|1}\} = \tfrac{1}{n}\Sigma x^{n|1}-\tfrac{1}{n}x^{n|1}$$

die entsteht, wenn in der Summe der vorigen Reihe $1,2,3,\ldots,x-1$ statt x eingeführt wird. Die Summe der neuen Reihe ist also

$$\Sigma x^{n|1} = (x+n-1)\Sigma x^{n-1|1}+\tfrac{1}{n}x^{n|1}-\tfrac{1}{n}\Sigma x^{n|1} = \tfrac{1}{n}x^{n+1|1}-\tfrac{1}{n}\Sigma x^{n|1}$$

oder

506) $$\Sigma x^{n|1} = \frac{1}{n+1}x^{n+1|1}$$

Messen wir alle Glieder der Reihe durch $1^{n|1}$, und zeigen das Messen eines Products $a^{n|b}$ mit $1^{n|1}$ durch einen Strich an, so dafs

$$\frac{a^{n|b}}{1^{n|1}} = a_{,}^{n|b}$$

ist, so ergiebt sich nach dem Vorhergehenden die Summe der Reihe

507) $$1_{,}^{n|1}+2_{,}^{n|1}+3_{,}^{n|1}+\ldots+x_{,}^{n|1} = \Sigma x_{,}^{n|1} = x_{,}^{n+1|1}$$

§. 156.

Die Glieder dieser Reihe verbinden wir nach ihrer Folge mit den Producten

$$(1+a)(1+b)(1+c),(2+a)(2+b)(2+c), \ldots, (x+a)(x+b)(x+c)$$

Wählen wir statt a,b,c, ... die Elemente $a_1,a_2,a_3, \ldots$ und gebrauchen wieder die früher §. 118 eingeführte Bezeichnung

$$(s+a_q)(s+a_{q+1}) \ldots (s+a_{q+p}) = (s+a_q|p+1)$$

so ist die Reihe, deren Summe wir suchen, folgende:

$$(1+a_1|p).1^{n|1}_{,}+(2+a_1|p).2^{n|1}_{,}+ \ldots +(x+a_1|p).x^{n|1}_{,} = \Sigma(x+a_1|p).x^{n|1}_{,}$$

Wir bringen zuerst die Summe dieser Reihe, in welcher jedes der Producte, welche mit den Gliedern der vorigen Reihe verbunden sind, aus p Factoren besteht, auf die Summe einer Reihe zurück, in welcher jedes Product nur aus p—1 Factoren besteht. Wir trennen deshalb von dem Producte $(x+a_1|p).x^{n|1}_{,}$ den ersten Factor $x+a_1$, zerlegen diesen in $1+a_1$ und $x-1$, und gesellen wieder $1+a_1$ zu dem ersten und x—1 zu dem zweiten Theile des Gliedes der Reihe, so dafs

$$(x+a_1|p).x^{n|1}_{,} = (1+a_1).(x+a_2|p-1).x^{n|1}_{,}+(n+1).(x+a_2|p-1).(x-1)^{n+1|1}_{,}$$

Setzen wir nun statt x die Zahlen 1,2,3,... , x, so wird hierdurch die vorgegebene Reihe in zwei Reihen zerlegt,

$$(1+a_1)\{(1+a_2|p-1).1^{n|1}_{,}+(2+a_2|p-1)2^{n|1}_{,}+ \ldots +(x+a_2|p-1).x^{n|1}_{,}\}$$

und

$$(n+1)\{(2+a_2|p-1).1^{n+1|1}_{,}+(3+a_2|p-1).2^{n+1|1}_{,}+ \ldots +(x+a_2|p-1).(x-1)^{n+1|1}_{,}\}$$

und die Summe der vorgegebenen Reihe auf die Summe dieser beiden Reihen zurückgebracht; in Zeichen:

508)
$$\Sigma(x+a_1|p).x^{n|1}_{,} =$$
$$= (1+a_1)\Sigma(x+a_2|p-1).x^{n|1}_{,}+(n+1)\Sigma(x-1+1+a_2|p-1)(x-1)^{n+1|1}_{,}$$

§. 157.

Von dieser zurücklaufenden Bestimmungsweise zur unabhängigen ist der Uebergang leicht; wir setzen $p = 1$, und erhalten nach 507 die Summe der Reihe

509) $$\Sigma(x+a_1|1).x^{n|1} = (1+a_1).x^{n+1|1}+(n+1).(x-1)^{n+2|1}$$

Ist $p = 2$, so ist

$$\Sigma(x+a_1|2).x^{n|1} = (1+a_1)\Sigma(x+a_2|1)x^{n|1}+(n+1)\Sigma(x-1+1+a_2|1).(x-1)^{n+1|1}$$

Der erste Theil dieser Summe wird gebildet, indem die vorige Summe, nachdem die Stellenzahl von a um 1 erhöhet ist, mit $1+a_1$ vervielfacht wird, und der zweite Theil, indem nicht allein die Stellenzahl von a, sondern auch die Zahl 1, zu welcher a_1 gezählt werden soll, um 1 erhöhet, und $x-1$ statt x, $n+1$ statt n gesetzt, und das Ganze mit $n+1$ vervielfacht wird. Es ist also

510) $$\Sigma(x+a_1|2).x^{n|1} = (1+a_1)(1+a_2)x^{n+1|1}+\begin{vmatrix}1+a_1\\2+a_2\end{vmatrix}(n+1)^{1|1}(x-1)^{n+2|1}+$$
$$+ (n+1)^{2|1}(x-2)^{n+3|1}$$

Ist $p = 3$, so ist

$$\Sigma(x+a_1|3).x^{n|1} = (1+a_1)\Sigma(x+a_2|2).x^{n|1}+(n+1)\Sigma(x-1+1+a_2|2).(x-1)^{n+1|1}$$

Nach dieser Gleichung mufs in der vorigen Summe die Stellenzahl von a erhöhet, und das Ganze mit $1+a_1$ vervielfacht, dann in der vorigen Summe nicht allein die Stellenzahl von a, sondern auch die Zahl, zu welcher a gezählt werden soll, um 1 erhöhet, und $x-1$ statt x, $n+1$ statt n gesetzt und das Ganze mit $n+1$ vervielfacht werden. Die Summe ist also

511) $$\Sigma(x+a_1|3).x^{n|1} = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3).x^{n+1|1}+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1+a_2\\ 1+a_1 & 2+a_3\\ 2+a_2 & 2+a_3\end{vmatrix}(n+1)^{1|1}(x-1)^{n+2|1}$$
$$+\begin{vmatrix}1+a_1\\2+a_2\\3+a_3\end{vmatrix}(n+1)^{2|1}(x-2)^{n+3|1}+(n+1)^{3|1}(x-3)^{n+4|1}$$

Ist $p = 4$, so ist

$$\Sigma(x+a_1|4)x^{n|1} = (1+a_1)\Sigma(x+a_2|3).x^{n|1} + (n+1)\Sigma(x-1+1+a_2|3).(x-1)^{n+1|1}$$

Die Vorschrift bleibt dieselbe, so wie vorhin; es mufs auch hier in der vorigen Summe jede Stellenzahl des a um 1 erhöhet, und die Summe mit $1 + a_1$ vervielfacht werden; dann in der vorigen Summe sowohl die Stellenzahl von a als jene Zahl, zu welcher a gezählt wird, um 1 erhöhet, $x-1$ statt x und $n+1$ statt n gesetzt, und das Ganze mit $n+1$ vervielfacht werden. Wir erhalten hierdurch folgende Summe:

512) $$\Sigma(x+a_1|4)x^{n|1} = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)x^{n+1|1} +$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_2 & 1+a_3 \\ 1+a_1 & 1+a_2 & 2+a_4 \\ 1+a_1 & 2+a_3 & 2+a_4 \\ 2+a_2 & 2+a_3 & 2+a_4 \end{vmatrix} (n+1)^{1|1}(x-1)^{n+2|1} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+a_2 \\ 1+a_1 & 2+a_3 \\ 1+a_1 & 3+a_4 \\ 2+a_2 & 2+a_3 \\ 2+a_2 & 3+a_4 \\ 3+a_3 & 3+a_4 \end{vmatrix} (n+1)^{2|1}(x-2)^{n+3|1} +$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 \\ 2+a_2 \\ 3+a_3 \\ 4+a_4 \end{vmatrix} (n+1)^{3|1}.(x-3)^{n+4|1} + (n+1)^{4|1}(x-4)^{n+5|1}$$

Das Gesetz der Bildung dieser Summen bleibt unveränderlich; das Erhöhen der Stellenzahlen von a in der vorigen Summe, das Hinzutreten des Factors $1+a_1$, das Erhöhen der Zahlen, welche allein stehen, und der Stellenzahlen des a zugleich, das Erniedrigen des x um 1 und das Erhöhen des n kehrt immer bei jeder Summe wieder zurück. Hierdurch entstehen die geordneten Verbindungen mit und ohne Wiederholungen; die Zahlen, welche allein stehen, bilden die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen und die Stellenzahlen von a die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen als:

$$\begin{array}{cccccccc}
1\;1\;1\;1 & 1\;1\;1 & 1\;1 & 1 & 1\;2\;3\;4 & 1\;2\;3 & 1\;2 & 1 \\
 & 1\;1\;2 & 1\;2 & 2 & & 1\;2\;4 & 1\;3 & 2 \\
 & 1\;2\;2 & 1\;3 & 3 & & 1\;3\;4 & 1\;4 & 3 \\
 & 2\;2\;2 & 2\;2 & 4 & & 2\;3\;4 & 2\;3 & 4 \\
 & & 2\;3 & & & & 2\;4 & \\
 & & 3\;3 & & & & 3\;4 &
\end{array}$$

Beide Verbindungsarten sind hier auf eine höchstmerkwürdige Weise mit einander vereinigt. Nach diesem Gesetze kann jetzt die Summe jeder dieser Reihe mit Leichtigkeit gebildet werden; so ist

$$513)\qquad \Sigma(x+a_1|5).x_{,}^{n|1} = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)(1+a_5)\,x_{,}^{n+1|1}$$

$$+\left|\begin{array}{l}
1+a_1|1+a_2|1+a_3|1+a_4 \\
1+a_1|1+a_2|1+a_3|2+a_5 \\
1+a_1|1+a_2|2+a_4|2+a_5 \\
1+a_1|2+a_3|2+a_4|2+a_5 \\
2+a_2|2+a_3|2+a_4|2+a_5
\end{array}\right|(n+1)^{1|1}(x-1)_{,}^{n+2|1}+\left|\begin{array}{l}
1+a_1|1+a_2|1+a_3 \\
1+a_1|1+a_2|2+a_4 \\
1+a_1|1+a_2|3+a_5 \\
1+a_1|2+a_3|2+a_4 \\
1+a_1|2+a_3\;3+a_5 \\
1+a_1|3+a_4|3+a_5 \\
2+a_2|2+a_3|2+a_4 \\
2+a_2|2+a_3|3+a_5 \\
2+a_2|3+a_4|3+a_5 \\
3+a_3|3+a_4|3+a_5
\end{array}\right|(n+1)^{2|1}(x-2)_{,}^{n+3|1}$$

$$+\left|\begin{array}{l}
1+a_1|1+a_2 \\
1+a_1|2+a_3 \\
1+a_1|3+a_4 \\
1+a_1|4+a_5 \\
2+a_2|2+a_3 \\
2+a_2|3+a_4 \\
2+a_2|4+a_5 \\
3+a_3|3+a_4 \\
3+a_3|4+a_5 \\
4+a_4|4+a_5
\end{array}\right|(n+1)^{3|1}(x-3)_{,}^{n+4|1}+\left|\begin{array}{l}
1+a_1 \\
2+a_2 \\
3+a_3 \\
4+a_4 \\
5+a_5
\end{array}\right|(n+1)^{4|1}(x-4)_{,}^{n+5|1}+(n+1)^{5|1}(x-5)_{,}^{+6|1}$$

§. 158.

Wir zerlegen den Factor $x+a_1$, welchen wir im §. 156 vom Producte getrennt haben, in die beiden Theile a_1-n und $x+n$; das ursprüngliche Product wird hierdurch in zwei andere zerlegt

$$(x+a_1|p)x^{n|1}_{,} = (a_1-n)(x+a_2|p-1).x^{n|1}_{,}+(n+1)(x+a_2|p-1).x^{n+1|1}_{,}$$

und die ursprüngliche Reihe in zwei andere Reihen, und dadurch ihre Summe auf die Summen zweier früheren Reihen zurückgebracht, so dafs

514) $$\Sigma(x+a_1|p)x^{n|1}_{,} = (a_1-n)\Sigma(x+a_2|p-1).x^{n|1}_{,}+(n+1)\Sigma(x+a_2|p-1).x^{n+1|1}_{,}$$

Gehen wir von dieser zurücklaufenden Bildungsweise zu der unabhängigen über, und setzen zuerst $p = 1$, so ist

515) $$\Sigma(x+a_1|1)x^{n|1}_{,} = (a_1-n)x^{n+1|1}_{,}+(n+1)x^{n+2|1}_{,}$$

Ist $p = 2$, so ist

$$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1}_{,} = (a_1-n)\Sigma(x+a_2|1)x^{n|1}_{,}+(n+1)\Sigma(x+a_2|1)x^{n+1|1}_{,}$$

Nach dieser Vorschrift wird die vorige Snmme, nachdem in ihr die Stellenzahl von a um 1 erhöhet ist, mit a_1-n, und dann, nachdem in ihr sowohl die Stellenzahl von a als die Zahl n um 1 erhöhet ist, mit $n+1$ vervielfacht. Es ist also

516) $$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1}_{,} = (a_1-n-0)(a_2-n-0)x^{n+1|1}_{,} + \begin{vmatrix} a_1-n-0 & (n+1)^{1|1}x^{n+2|1}_{,}+(n+1)^{2|1}x^{n+3|1}_{,} \\ a_2-1-1 & \end{vmatrix}$$

Ist $p = 3$, so ist

$$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1}_{,} = (a_1-n)\Sigma(x+a_2|2)x^{n|1}_{,}+(n+1)\Sigma(x+a_2|2)x^{n+1|1}_{,}$$

Dieselbe Vorschrift, welche für die vorige Summe galt, gilt auch für diese, und es ist

517) $$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1} = (a_1-n-o)(a_2-n-o)(a_3-n-o).x^{n+1|1}$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-n-o & a_2-n-o \\ a_1-n-o & a_3-n-1 \\ a_2-n-1 & a_3-n-1 \end{vmatrix}(n+1)^{1|1}x^{n+2|1}+\begin{vmatrix} a_1-n-o \\ a_2-n-1 \\ a_3-n-2 \end{vmatrix}(n+1)^{2|1}x^{n+3|1}$$
$$+(n+1)^{3|1}x^{n+4|1}$$

Nach derselben Vorschrift wird die Summe der nächstfolgenden Reihe gebildet; es ist

518) $$\Sigma(x+a_1|4)x^{n|1} =$$
$$= (a_1-n-o)(a_2-n-o)(a_3-n-o)(a_4-n-o).x^{n+1|1}$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-n-o & a_2-n-o & a_3-n-o \\ a_1-n-o & a_2-n-o & a_4-n-1 \\ a_1-n-o & a_3-n-1 & a_4-n-1 \\ a_2-n-1 & a_3-n-1 & a_4-n-1 \end{vmatrix}(n+1)^{1|1}x^{n+2|1}$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-n-o & a_2-n-o \\ a_1-n-o & a_3-n-1 \\ a_1-n-o & a_4-n-2 \\ a_1-n-1 & a_3-n-1 \\ a_2-n-1 & a_4-n-2 \\ a_3-u-2 & a_4-n-2 \end{vmatrix}(n+1)^{2|1}x^{n+3|1}$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-n-o \\ a_2-n-1 \\ a_3-n-2 \\ a_4-n-3 \end{vmatrix}(n+1)^{3|1}x^{n+4|1}+(n+1)^{4|1}x^{n+5|1}$$

Die Stellenzahlen von a bilden die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, und die Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . , welche allein stehen, die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen, als

1234	123	12	1	und	0000	000	00	0
	124	13	2			001	01	1
	134	14	3			011	02	2
	234	23	4			111	11	3
		24					12	
		34					22	

§. 159.

Den Factor $x+a_1$ zerlegen wir von neuem in zwei Theile

$$x+a_1 = \frac{(1+a_1)(x+n)+(n-a_1)(x-1)}{n+1}$$

und dadurch das ursprüngliche Product in zwei andere Producte

$$(x+a_1|p).x^{n|1}_{,} = (1+a_1)(x+a_2|p-1).x^{n+1|1}_{,}+(n-a_1)(x+a_2|p-1)x^{n+1|1}_{,}$$

und die Summe der vorgegebenen Reihe in die Summen zweier früheren

519) $$\Sigma(x+a_1|p)\,x^{n|1}_{,} = (1+a_1)\Sigma(x+a_2|p-1)x^{n+1|1}_{,}+ \\ +(n-a_1)\Sigma(x-1+1+a_2|p-1).(x-1)^{n+1|1}_{,}$$

Nach dieser Gleichung finden wir, wenn wir $p = 1$ setzen, dafs die Summe der ersten Reihe

520) $$\Sigma(x+a_1|1)x^{n|1}_{,} = (1+a_1).x^{n+2|1}_{,}+(n-a_1).(x-1)^{n+2|1}_{,}$$

Setzen wir $p = 2$, so erhalten wir die Vorschrift zur Bildung der Summe der nächstfolgenden Reihe

$$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1}_{,} = (1+a_1)\Sigma(x+a_2|1)x^{n+1|1}_{,}+(n-a_1)\Sigma(x-1+1+a_2|1)(x-1)^{n+1|1}_{,}$$

Nach dieser mufs zuerst in der Summe der vorigen Reihe die Stellenzahl des a und auch n um 1 vermehrt, und dann das Ganze mit $1+a_1$ vervielfacht werden; dann in der vorigen Summe $1+a_2$ statt a_1, $x-1$

statt x, n+1 statt n gesetzt, und das Ganze mit $n-a_1$ vervielfacht werden; hierdurch entsteht die Summe

521) $$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1} = (1+a_1)(1+a_2)x^{n+3|1} + \left|\begin{matrix}1+a_1 & n+1-a_2\\ 2+a_2 & n+o-a_1\end{matrix}\right|(x-1)^{n+3|1} + (n+o-a_1)(n+o-a_2)(x-2)^{n+3|1}$$

Setzen wir $p = 3$, so wird

$$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1} = (1+a_1)\Sigma(x+a_2|2)x^{n+1|1} + (n-a_1)\Sigma(x-1+1+a_2|2)(x-1)^{n+1|1}$$

Die vorige Vorschrift bleibt ungeändert, und dic Summe der Reihe ist nach ihr folgende:

522) $$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1} = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3).x^{n+4|1} + \left|\begin{matrix}1+a_1 & 1+a_2 & n+2-a_3\\ 1+a_1 & 2+a_3 & n+1-a_2\\ 2+a_2 & 2+a_3 & n+o-a_1\end{matrix}\right|(x-1)^{n+4|1} + \left|\begin{matrix}1+a_1 & n+1-a_2 & n+1-a_3\\ 2+a_2 & n+o-a_1 & n+1-a_3\\ 3+a_3 & n+o-a_1 & n+o-a_2\end{matrix}\right|(x-2)^{n+4|1} + (n+o-a_1)(n+o-a_2)(n+o-a_3).(x-3)^{n+4|1}$$

Früher waren zwei, hier sind sogar vier Verbindungsarten in einander verflochten, nämlich

1	1	1	und	1	2	3	1	2	und	2	1	1	o	o	o	und	3	2	3	1	2	3
	1	2					1	3		2		1	o	1				2	1	3		
	2	2					2	3		3		o	o	o				1	1	2		

Hiezu kommt noch, dafs in den Producten zwei verschiedene Arten von Factoren vorkommen, nämlich Factoren ohne n und Factoren mit n. Diese Bildungsweise vereinigt die beiden vorigen Bildungsweisen in den vorigen §§. Gehen wir zu der Summe der nächstfolgenden Reihe über, so bilden wir zuerst folgende Verbindungen, theils mit theils ohne Wiederholungen

1 1 1 1	1 2 3 4		
1 1 1	1 2 3	3	4
1 1 2	1 2 4	2	3
1 2 2	1 3 4	1	2
2 2 2	2 3 4	0	1
1 1	1 2	2 2	3 4
1 2	1 3	1 2	2 4
1 3	1 4	1 1	2 3
2 2	2 3	0 2	1 4
2 3	2 4	0 1	1 3
3 3	3 4	0 0	1 2
1	1	1 1 1	2 3 4
2	2	0 1 1	1 3 4
3	3	0 0 1	1 2 4
4	4	0 0 0	1 2 3
		0 0 0 0	1 2 3 4

und vereinigen diese auf folgende Weise

523) $$\Sigma(x+a_1|4).x^{n|1} = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4).x^{n+5|1}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+a_1|1+a_2|1+a_3|n+3-a_4 \\ 1+a_1|1+a_2|2+a_4|n+2-a_3 \\ 1+a_1|2+a_3|2+a_4|n+1-a_2 \\ 2+a_2|2+a_3|2+a_4|n+0-a_1 \end{vmatrix} (x-1)^{n+5|1}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+a_1|1+a_2|n+2-a_3|n+2-a_4 \\ 1+a_1|2+a_3|n+1-a_2|n+2-a_4 \\ 1+a_1|3+a_4|n+1-a_2|n+1-a_3 \\ 2+a_2|2+a_3|n+0-a_1|n+2-a_4 \\ 2+a_2|3+a_4|n+0-a_1|n+1-a_3 \\ 3+a_3|3+a_4|n+0-a_1|n+0-a_2 \end{vmatrix} (x-2)^{n+5|1}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+a_1|n+1-a_2|n+1-a_3|n+1-a_4 \\ 2+a_2|n+0-a_1|n+1-a_3|n+1-a_4 \\ 3+a_3|n+0-a_1|n+0-a_2|n+1-a_4 \\ 4+a_4|n+0-a_1|n+0-a_2|n+0-a_3 \end{vmatrix} (x-3)^{n+5|1}$$

$$+(n+0-a_1)(n+0-a_2)(n+0-a_3)(n+0-a_4).(x-4)^{n+5|1}$$

§. 160.

Aufser diesen dreien verschiedenen unabhängigen Bildungsweisen gibt es noch drei andere, welche wir aber nicht mehr durch Zerlegung des getrennten Factors, sondern nur dadurch finden, dafs wir die Summe der ersten Reihe, aus welcher die Summen der späteren Reihen abgeleitet werden, umformen. Bevor wir zum Geschäfte selbst gehen, ändern wir zuerst die Gleichung 508 für die zurücklaufende Bildungsweise insofern um, dafs nicht der erste, sondern der letzte Factor vom ursprünglichen Producte getrennt wird, nämlich, dafs

524) $$\Sigma(x+a_1|p).x^{n|1}_{,} = (1+a_p)\Sigma(x+a_1|p-1)x^{n|1}_{,} + \\ +(n+1)\Sigma(x-1+1+a_1|p-1)(x-1)^{n+1|1}_{,}$$

Die Gleichung, welche bei dieser Umformung in Anwendung kommt, ist

525) $$(1+a_p)(x-q)^{n+q+1|1}_{,}+(n+1).(x-q-1)^{n+q+2|1}_{,} = \\ = (a_p+x-q).(x-q)^{n+q+1|1}_{,}-(q+1).(x-q-1)^{n+q+2|1}_{,}$$

Nach dieser Gleichung geht, wenn $p=1$ und $q=0$ gesetzt wird, die Summe der ersten Reihe 509 in folgende über

526) $$\Sigma(x+a_1|1).x^{n|1}_{,} = (a_1+x-0).x^{n+1|1}_{,}-1^{1|1}.(x-1)^{n+2|1}_{,}$$

Setzen wir nun in der Gleichung 524, $p=2$, so wird

$$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1}_{,} = (1+a_2)\Sigma(x+a_1|1)x^{n|1}_{,}+(n+1)\Sigma(x-1+1+a_1|1).(x-1)^{n+1|1}_{,}$$
$$=(a_1+x-0)\{(1+a_2)x^{n+1|1}_{,}+(n+1)(x-1)^{n+2|1}_{,}\}-1^{1|1}\{(1+a_2)(x-1)^{n+2|1}_{,}+(n+1)(x-2)^{n+3|1}_{,}\}$$

Nach der Hülfsgleichung 525 geht der Factor von a_1+x-0 über in

$$(a_2+x-0)x^{n+1|1}_{,}-1(x-1)^{n+2|1}_{,}$$

und der Factor von $1^{1|1}$ über in

$$(a_2+x-1)(x-1)^{n+2|1}_{,}-2(x-2)^{n+3|1}_{,}$$

Werden nun diese Producte mit den erwähnten Factoren vereinigt, so erhalten wir folgende Summe

527) $$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1} =$$

$$= (a_1+x-o)(a_2+x-o)x^{n+1|1} - \begin{vmatrix} a_1+x-o \\ a_2+x-1 \end{vmatrix} 1^{1|1}(x-1)^{n+2|1} + 1^{2|1}(x-2)^{n+3|1}$$

Wir setzen ferner $p = 3$, und erhalten für die Bildung der Summe der nächstfolgenden Reihe die Gleichung

$$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1} = (1+a_3)\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1} + (n+1)\Sigma(x-1+1+a_1|2)(x-1)^{n+1|1}$$

$$= (a_1+x-o)(a_2+x-o)\{(1+a_3)x^{n+1|1} + (n+1)(x-1)^{n+2|1}\}$$

$$- \begin{vmatrix} a_1+x-o \\ a_2+x-1 \end{vmatrix} 1^{1|1}\{(1+a_3)(x-1)^{n+2|1} + (n+1)(x-2)^{n+3|1}\}$$

$$+ 1^{2|1}\{(1+a_3)(x-2)^{n+3|1} + (n+1)(x-3)^{n+4|1}\}$$

Die drei Factoren, wovon jeder aus zweien Producten besteht, gehen nach der Hülfsgleichung 525 in folgende über

$$(a_3+x-o)x^{n+1|1} - 1.(x-1)^{n+2|1}$$

$$(a_3+x-1)(x-1)^{n+2|1} - 2.(x-2)^{n+3|1}$$

$$(a_3+x-2)(x-2)^{n+3|1} - 3.(x-3)^{n+4|1}$$

Werden diese mit ihren zugehörigen Factoren vereinigt, so entsteht folgende Summe

528) $$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1} = (a_1+x-o)(a_2+x-o)(a_3+x-o).x^{n+1|1}$$

$$- \begin{vmatrix} a+x-o & a_2+x-o \\ a_1+x-o & a_3+x-1 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 \end{vmatrix} 1^{1|1}(x-1)^{n+2|1} + \begin{vmatrix} a_1+x-o \\ a_2+x-1 \\ a_3+x-2 \end{vmatrix} 1^{2|1}(x-2)^{n+3|1} - 1^{3|1}(x-3)^{n+4|1}$$

Hier entstehen wieder zwei verschiedene Arten von Verbindungen, nämlich

1 2 3 1 2 1 und o o o o o o

1 3 2 o 1 1

2 3 3 1 1 2

Dasselbe Verfahren führt zu jeder folgenden Summe, die dasselbe Gesetz befolgt; es ist

529) $$\Sigma(x+a_1|1)x^{n|1} = (a_1+x-0)(a_2+x-0)(a_3+x-0)(a_4+x-0).x^{n+1|1}$$

$$-\begin{vmatrix} a_1+x-0 & a_2+x-0 & a_3+x-0 \\ a_1+x-0 & a_2+x-0 & a_4+x-1 \\ a_1+x-0 & a_3+x-1 & a_4+x-1 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 & a_4+x-1 \end{vmatrix} 1^{1|1}(x-1)^{n+2|1}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+x-0 & a_2+x-0 \\ a_1+x-0 & a_3+x-1 \\ a_1+x-0 & a_4+x-2 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 \\ a_2+x-1 & a_4+x-2 \\ a_3+x-2 & a_4+x-2 \end{vmatrix} 1^{2|1}(x-2)^{n+3|1}$$

$$-\begin{vmatrix} a_1+x-0 \\ a_2+x-1 \\ a_3+x-2 \\ a_4+x-3 \end{vmatrix} 1^{3|1}(x-3)^{n+4|1} + 1^{4|1}(x-4)^{n+5|1}$$

Die Verbindungen, welche in dieser Summe vorkommen, sind

1234	123	12	1	und	0000	000	00	0
	124	13	2			001	01	1
	134	14	3			011	02	2
	234	23	4			111	11	3
		24					12	
		34					22	

§. 161.

Die zweite Umformung geschieht vermittelst der Gleichung

530) $$(1+a_p)x^{n+q|}_{,}+(n+1)(x-1)^{n+q+1|1}_{,} = (a_p+x+q)^{n+q|}_{,}-q.x^{n+q+1|1}_{,}$$

und nach dieser geht die Summe der ersten Reihe 509 in folgende über

531) $$\Sigma(x+a_1|1)x^{n|}_{,} = (a_1+x+1)^{n+1|1}_{,}-1^{1|1}x^{n+2|1}_{,}$$

Die Summe der folgenden Reihe wird aus dieser hergeleitet; es ist

$$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1}_{,} = (1+a_2)\Sigma(x+a_1|1)x^{n|1}_{,}+(n+1)\Sigma(x-1+1+a_1|1).(x-1)^{n+1|1}_{,}$$
$$= (a_1+x+1)\{(1+a_2)x^{n+1|1}_{,}+(n+1)(x-1)^{n+2|1}_{,}\}$$
$$-1^{1|1}\{(1+a_2)x^{n+2|1}_{,}+(n+1)(x-1)^{n+3|1}_{,}\}$$

Werden die eingeklammerten Producte nach der Hülfsgleichung 530 umgeformt

$$(a_2+x+1)x^{n+1|1}_{,}-1\,x^{n+2|1}_{,}$$
$$(a_2+x+2)x^{n+2|1}_{,}-2.x^{n+3|1}_{,}$$

und diese mit den zugehörigen Factoren verbunden, so ergiebt sich die Summe der zweiten Reihe

532) $$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1}_{,} = (a_1+x+1)(a_2+x+1)x^{n+1|1}_{,} -$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 \\ a_2+x+2 \end{vmatrix} 1^{1|1}x^{n+2|1}_{,}+1^{2|1}x^{n+3|1}_{,}$$

Auf dieser beruhet wieder die Summe der nächstfolgenden Reihe; diese ist

$$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1}_{,} = (1+a_3)\Sigma(x+a_1|2)x^{n|}_{,}+(n+1)\Sigma(x-1+1+a_1|2)(x-1)^{n+1|1}_{,}$$
$$= (a_1+x+1)(a_2+x+1)\{(1+a_3)x^{n+1|1}_{,}+(n+1)(x-1)^{n+2|1}_{,}\}$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 \\ a_2+x+2 \end{vmatrix} 1^{1|1}\{(1+a_3)x^{n+2|1}_{,}+(n+1)(x-1)^{n+3|1}_{,}\}$$
$$+1^{2|1}\{(1+a_3)x^{n+3|1}_{,}+(n+1)(x-1)^{n+4|1}_{,}\}$$

Die eingeklammerten Producte werden nach der Hülfsgleichung 530 in folgende verwandelt

$$(a_3+x+1)x^{n+1|1}_{,}-1.x^{n+2|1}_{,}$$
$$(a_3+x+2)x^{n+2|1}_{,}-2.x^{n+3|1}_{,}$$
$$(a_3+x+3)x^{n+3|1}_{,}-3.x^{n+4|1}_{,}$$

Werden nun diese mit den zugehörigen Factoren versehen, so entsteht die Summe der obigen Reihe

533) $$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1}_{,} = (a_1+x+1)(a_2+x+1)(a_3+x+1).x^{n+1|1}_{,}$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 & a_2+x+1 \\ a_1+x+1 & a_3+x+2 \end{vmatrix} 1^{1|1}x^{n+2|1}_{,} + \begin{vmatrix} a_1+x+1 \\ a_2+x+2 \end{vmatrix} 1^{2|}x^{n+3|1}_{,} - 1^{3|1}x^{n+4|1}_{,}$$
$$\begin{vmatrix} a_2+x+2 & a_3+x+2 \end{vmatrix}$$

Zur Summe der vierten Reihe bilden wir jetzt folgende Verbindungen ohne und mit Wiederholungen

1234	123	12	1	und	1111	111	11	1
	124	13	1			112	12	2
	134	14	3			122	13	3
	234	23	4			222	22	4
		24					23	
		34					33	

und vereinigen diese auf folgende Weise

534) $$\Sigma(x+a_1|4)x^{n|1}_{,} = (a_1+x+1)(a_2+x+1)(a_3+x+1)(a_4+x+1).x^{n+1|1}_{,}$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 & a_2+x+1 & a_3+x+1 \\ a_1+x+1 & a_2+x+1 & a_4+x+2 \\ a_1+x+1 & a_3+x+2 & a_4+x+2 \\ a_2+x+2 & a_3+x+2 & a_4+x+2 \end{vmatrix} 1^{1|1}.x^{n+2|1}_{,} + \begin{vmatrix} a_1+x+1 & a_2+x+1 \\ a_1+x+1 & a_3+x+2 \\ a_1+x+1 & a_4+x+3 \\ a_2+x+2 & a_3+x+2 \\ a_2+x+2 & a_4+x+3 \\ a_3+x+3 & a_4+x+3 \end{vmatrix} 1^{2|1}.x^{n+3|1}_{,}$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 \\ a_2+x+2 \\ a_3+x+3 \\ a_4+x+4 \end{vmatrix} 1^{3|1}.x^{n+4|1}_{,} + 1^{4|1}.x^{n+5|1}_{,}$$

§. 162.

Bei der dritten Umformung wird die zurücklaufende Bildungsweise in §. 159 zum Grunde gelegt, nämlich

$$\Sigma(x+a_1|p)x^{n|1} = (a_p-n)\Sigma(x+a_1|p-1)x^{n|1}+(n+1)\Sigma(x+a_1|p-1)x^{n+1|1}$$

und die Gleichung

$$535)\qquad (a-n)\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+q|1}}+(n+h)\frac{x^{n+2|1}}{1^{n+q+1|1}} =$$

$$= \{(q-h+1)(a+h)+(n+h)(a+x-q+h)\}\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+q+1|1}}$$

zu Hülfe genommen. Wir erhalten aus der ersten Gleichung die Summe

$$\Sigma(x+a_1|1)x^{n|1} = (a_1-n).x^{n+1|1}+(n+1)x^{n+2|1}$$

welche nach der Hülfsgleichung folgende Form annimmt

$$536)\qquad \Sigma(x+a_1|1)x^{n|1} = (1^{1|1}(a_1+1)+(a_1+x)(n+1)^{1|1})\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+2|1}}$$

Nach der ersten Gleichung ist ferner

$$\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1} = (a_2-n)\Sigma(x+a_1|1)x^{n|1}+(n+1)\Sigma(x+a_1|1)x^{n+1|1}$$

$$= (a_1+1)1^{1|1}\left\{(a_2-n)\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+2|1}}+(n+1).\frac{x^{n+2|1}}{1^{n+3|1}}\right\}$$

$$+(a_1+x)(n+1)^{1|1}\left\{(a_2-n)\frac{x^{n+1|x}}{1^{n+2|x}}+(n+2).\frac{x^{n+2|x}}{1^{n+3|x}}\right\}$$

Die eingeklammerten Producte werden nach der Hülfsgleichung 535 in folgende verwandelt

$$\{2(a_2+1)+(n+1)(a_2+x-1)\}\frac{x^{n+1|x}}{1^{n+3|x}}$$

und $\{1(a_2+2)+(n+2)(a_2+x-0)\}\frac{x^{n+1|x}}{1^{n+3|x}}$

und diese mit den zugehörigen Factoren verbunden. Die Summe ist

$$537)\quad \Sigma(x+a_1|2)x^{n|1} = \{(a_1+1)(a_2+1).1^{2|1}+\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2+x-1 \\ a_2+2 & a_1+x-o \end{vmatrix} 1^{1|1}(n+1)^{1|1}$$

$$+(a_1+x-o)(a_2+x-o)(n+1)^{2|1}\}\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+3.1}}$$

Nach der ersten Gleichung ist die Summe der nächstfolgenden Reihe

$$\Sigma(x+a_1|3)x^{n|1} = (a_3-n)\Sigma(x+a_1|2)x^{n|1}+(n+1)\Sigma(x+a_1|2)x^{n+1|1}$$

$$=(a_1+1)(a_2+1)1^{2|1}\{(a_3-n)\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+3|1}}+(n+1).\frac{x^{n+2.1}}{1^{n+4|1}}\}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2+x-1 \\ a_2+2 & a_1+x-o \end{vmatrix} 1^{1|1}(n+1)^{1|1}\{(a_3-n)\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+3|1}}+(n+2).\frac{x^{n+2|1}}{1^{n+4|1}}\}$$

$$+(a_1+x-o)(a_2+x-o)(n+1)1^{2|1}\{(a_3-n)\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+3|1}}+(n+3)\frac{x^{n+2|1}}{1^{n+4|1}}\}$$

Die eingeklammerten Producte werden nach der Hülfsgleichung 535 umgeformt, wodurch die Summe der Reihe folgende Gestalt annimmt:

$$538)\ \Sigma(x+a_1|3)x^{n|1}=\{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)1^{3|1}+\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2+1 & a_3+x-2 \\ a_1+1 & a_3+2 & a_2+x-1 \\ a_2+2 & a_3+2 & a_1+x-o \end{vmatrix} 1^{2.1}(n+1)^{1|1}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2+x-1 & a_3+x-1 \\ a_2+2 & a_1+x-o & a_3+x-1 \\ a_3+3 & a_1+x-o & a_2+x-o \end{vmatrix} 1^{1|1}(n+1)^{2|1}+(a_1+x-o)(a_2+x-o)(a_3+x-o)(n+1)^{3|1}\}\frac{x^{n+1|1}}{1^{n+4|1}}$$

Eben so finden wir, dafs

539) $$\Sigma(x+a_1|4)x^{n|1} = \{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1).1^{4|1} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & a_4+x-3 \\ a_1+1 & a_2+1 & a_4+2 & a_3+x-2 \\ a_1+1 & a_3+2 & a_4+2 & a_2+x-1 \\ a_2+2 & a_3+2 & a_4+2 & a_1+x-0 \end{vmatrix} 1^{3|1}(n+1)^{1|1} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2+1 & a_3+x-2 & a_4+x-2 \\ a_1+1 & a_3+2 & a_2+x-1 & a_4+x-2 \\ a_1+1 & a_4+3 & a_2+x-1 & a_3+x-1 \\ a_2+2 & a_3+2 & a_1+x-0 & a_4+x-2 \\ a_2+2 & a_4+3 & a_1+x-0 & a_3+x-1 \\ a_3+3 & a_4+3 & a_1+x-0 & a_2+x-0 \end{vmatrix} 1^{2|1}(n+1)^{2|1}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2+x-1 & a_3+x-1 & a_4+x-1 \\ a_2+2 & a_1+x-0 & a_3+x-1 & a_4+x-1 \\ a_3+3 & a_1+x-0 & a_2+x-0 & a_4+x-1 \\ a_4+4 & a_1+x-0 & a_2+x-0 & a_3+x-0 \end{vmatrix} 1^{1|1}(n+1)^{3|1}$$

$$+(a_1+x-0)(a_2+x-0)(a_3+x-0)(a_4+x-0).(n+1)^{4|1}\} \frac{x^{n+1|1}}{1^{n+5|1}}$$

§. 163.

Von diesen allgemeinen Reihen können wir jetzt mit Leichtigkeit zu besonderen Reihen übergehen; wir setzen

in §§ 158, 162. $a_1 = a+p-1, a_2 = a+p-2, a_3 = a+p-3, \ldots . a_p = a,$

und in §§. 159, 161. $a_1 = a, a_2 = a+1, a_3 = a+2, \ldots, a_p = a+p-1,$

und erhalten für eine und dieselbe Reihe

aus 512

540) $$(a+1)^{p|1}.1^{n|1}+(a+2)^{p|1}.2^{n|1}+(a+3)^{p|1}.3^{n|1}+\ldots+(a+x)^{p|1}.x^{n|1} =$$

$$= (a+1)^{p|1}.x_{,}^{n+1|1} + p_{,}^{1|-1}(a+2)^{p-1|1}(n+1)^{1|1}(x-1)_{,}^{n+2.1}$$
$$+ p_{,}^{2|-1}(a+3)^{p-2|1}(n+1)^{2|1}(x-2)_{,}^{n+3|1} + p_{,}^{3|-1}(a+4)^{p-3|1}(n+1)^{3|1}(x-3)_{,}^{n+4|1} + \ldots$$
$$\ldots + p_{,}^{p|-1}(a+p+1)^{0|1}(n+1)^{p|1}(x-p)_{,}^{n+p+1.1}$$

aus 534

541) $$= (a+x+1)^{p|1}x_{,}^{n+1|1} - p^{1|-1}(a+x+2)^{p-1|1}x_{,}^{n+2|1} + p^{2|-1}(a+x+3)^{p-2|1}x_{,}^{n+3|1}$$
$$- p^{3|-1}(a+x+4)^{p-3|1}x_{,}^{n+4|1} + \ldots (-)^{p}p^{p|-1}(a+x+p+1)^{0|1}x_{,}^{n+p+1|1}$$

aus 518

542) $$= (a-n)^{p|1}x_{,}^{n+1|1} + p_{,}^{1|-1}(a-n)^{p-1|1}(n+1)^{1|1}x_{,}^{n+2|1} +$$
$$p_{,}^{2|-1}(a-n)^{p-2|1}(n+1)^{2|1}x_{,}^{n+3|1} + \ldots + p_{,}^{p|-1}(a-n)^{0|1}(n+1)^{p|1}x_{,}^{n+p+1|1}$$

aus 529

543) $$= (a+x)^{p|1}x_{,}^{n+1|1} - p^{1|-1}(a+x)^{p-1|1}(x-1)_{,}^{n+2|1} + p^{2|-1}(a+x)^{p-2|1}(x-2)_{,}^{n+3|1}$$
$$- \ldots (-)^{p}p^{p|-1}(a+x)^{0|1}(x-p)_{,}^{n+p+1|1}$$

§. 164.

Wenn $n = 0$ ist, so ist $x_{,}^{n|1} = 1$; die sechs verschiedenen Summen erhalten dadurch keine gröfsere Einfachheit. Wir setzen $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a$, und erhalten für eine und dieselbe Reihe wieder vier Summen, nämlich aus 512

544) $$(1+a)^{p}.1_{,}^{n|1} + (2+a)^{p}.2_{,}^{n|1} + (3+a)^{p}.3_{,}^{n|1} + \ldots + (x+a)^{p}.x_{,}^{n|1}$$
$$= [p,1;0]x_{,}^{n+1|1} + [p-1,2;0](n+1)^{1|1}(x-1)_{,}^{n+2|1} + [p-2,3;0](n+1)^{2|1}(x-2)_{,}^{n+3|1}$$
$$+ \ldots + [0,p+1;0](n+1)^{p|1}(x-p)_{,}^{n+p+1|1}$$

aus den Elementen

$$1+a,\ 2+a,\ 3+a,\ 4+a, \ldots$$

aus 518

545) $$= [p,1;0]x_{,}^{n+1|1} + [p-1,2;0](n+1)^{1|1}x_{,}^{n+2|1} + [p-2,3;0](n+1)^{2|1}x_{,}^{n+3|1}$$
$$+ \ldots + [0,p+1;0](n+1)^{p|1}x_{,}^{n+p+1|1}$$

aus den Elementen

$$a-n-o,\ a-n-1,\ a-n-2,\ a-n-3,\ \ldots\ldots$$

aus 529

$$546)\quad = [p,1;o]x^{n+1|1} - [p-1,2;o]1^{1|1}.(x-1)^{n+2|1} + [p-2,3;o]1^{2|1}.(x-2)^{n+3|1}$$
$$- \ldots\ldots + \ldots (-)^p[o,p+1;o]1^{p|1}(x-p)^{n+p+1|1}$$

aus den Elementen

$$a+x-o, a+x-1, a+x-2, a+x-3, \ldots\ldots$$

nach 534

$$547)\quad = [p,1;o]x^{n+1|1} - [p-1,2;o]1^{1|1}.x^{n+2|1} + [p-2,3;o]1^{2|1} + x^{n+3|1}$$
$$- \ldots + \ldots (-)^p[o,p+1;o]p^{p|1}x^{n+p+1|1}$$

aus den Elementen

$$a+x+1,\ a+x+2,\ a+x+3,\ a+x+4,\ \ldots\ldots$$

wo nach Seite 254 [q,m;o] die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen zu q Elementen aus den ersten m unterzeichneten Elementen bedeutet.

§. 165.

Wir gehen zu einfacheren Reihen über und setzen $n = o$; hierdurch erhalten wir die Summe einer Reihe, welche bis jetzt immer durch Bernoullische Zahlen dargestellt ist, allein hier zuerst und zwar auf vier verschiedene Arten durch geordnete Verbindungen mit Wiederholungen ausgedrückt wird, nämlich aus 544

$$548)\quad (1+a)^p + (2+a)^p + (3+a)^p + \ldots\ldots + (x+a)^n =$$
$$= \tfrac{1}{1}[p,1;o].x^{1|1} + \tfrac{1}{2}[p-1,2;o](x-1)^{2|1} + \tfrac{1}{3}[p-2,3;o](x-\ )^{3|1}$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{1}{p+1}[o,p+1;o](x-p)^{p+1|1}$$

aus den Elementen

$$1+a,2+a,3+a,4+a,5+a,\ldots$$

aus 545

549) $$= \tfrac{1}{1}[p,1;o]x^{1|1} + \tfrac{1}{2}[p-1,2;o]x^{2|1} + \tfrac{1}{3}[p-2,3;o]x^{3|1}$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{1}{p+1}[o,p+1;o]x^{p+1|1}$$

aus den Elementen a, a—1, a—2, a—3, ...

aus 546

550) $$= \tfrac{1}{1}[p,1;o]x^{1|1} - \tfrac{1}{2}[p-1,2;o](x-1)^{2|1} + \tfrac{1}{3}[p-2,3;o](x-2)^{3|1} - \ldots$$
$$\ldots (-)^p \cdot \frac{1}{p+1}[o,p+1;o](x-p)^{p+1|1}$$

aus den Elementen

$$a+x-o,a+x-1,a+x-2,a+x-3,\ldots\ldots$$

aus 547

551) $$= \tfrac{1}{1}[p,1;o]x^{1|1} - \tfrac{1}{2}[p-1,2;o]x^{2|1} + \tfrac{1}{3}[p-2,3;o]x^{3|1} - \ldots$$
$$\ldots (-)^p \frac{1}{p+1} \cdot [o,p+1;o]x^{p+1|1}$$

aus den Elementen

$$a+x+1,a+x+2,a+x+3,a+x+4,a+x+5,\ldots\ldots$$

§. 166.

Wir gehen jetzt zum Schlusse dieser Abtheilung, und gehen dadurch, dafs wir noch das Element a aus der Reihe werfen, oder a = o setzen, zu der einfachsten dieser Art Reihen über. Es ist nach 548

552) $$1^p+2^p+3^p+4^p+\ldots\ldots+x^p = \Sigma x^p =$$
$$= \tfrac{1}{1}[p,1;o]x^{1|-1} + \tfrac{1}{2}[p-1,2;o]x^{2|-1} + \tfrac{1}{3}[p-2,3;o]x^{3|-1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{1}{p+1}[o,p+1;o]x^{p+1|-1}$$

aus den Elementen 1, 2, 3, 4, ...

nach 549

553) $= (-)^{p-1}\{\frac{1}{2}[p-1,2;o]x^{2|1} - \frac{1}{3}[p-2,3;o]x^{3|1} + \frac{1}{4}[p-3,4;o]x^{4|1}$
$- \ldots + \ldots (-)^{p-1}\frac{1}{p+1}[o,p+1;o]x^{p+1|1}\}$

aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, ...

nach 550

554) $= \frac{1}{1}[p,1;o]x^{1|-1} - \frac{1}{2}[p-1,2;o]x^{2|-1} + \frac{1}{3}[p-2,3;o]x^{3|-1} - \ldots .$
$\ldots (-)^{p}\frac{1}{p+1}[o,p+1;o]x^{p+1|-1}$

aus den Elementen x, x—1, x—2, x—3, ...

nach 551

555) $= \frac{1}{1}[p,1;o]x^{1|1} - \frac{1}{2}[p-1,2;o]x^{2|1} + \frac{1}{3}[p-2,3;o]x^{3|1} - \ldots$
$\ldots (-)^{p}\frac{1}{p+1}[o,p+1;o]x^{p+1|1}$

aus den Elementen x+1, x+2, x+3, x+4, . . .

nach 544, wenn n=1 und p=p—1 gesetzt wird,

556 $= [p-1,1;o]\frac{x^{2|1}}{2} + [p-2,2;o]\frac{(x-1)^{3|1}}{3} + [p-3,3;o]\frac{(x-2)^{4|1}}{4}$
$+ \ldots . + [o,p;o]\frac{(x-p+1)^{p+1|1}}{p+1}$

aus den Elementen 1, 2, 3, 4, ...

nach 545 bei denselben Voraussetzungen

557) $= (-)^{p-1}\{[p-1,1;o]\frac{x^{2|1}}{2} - [p-2,2;o]\frac{x^{3|1}}{3} + [p-3,3;o]\frac{x^{4|1}}{4} - \ldots .$
$\ldots (-)^{p-1}[o,p;o]\frac{x^{p+1|1}}{p+1}\}$

aus den Elementen 1, 2, 3, 4, ...

nach 546

$$558) \quad = [p-1,1;o]\frac{x^{2|1}}{1.2} - [p-2,2;o]\frac{(x-1)^{3|1}}{2.3} + [p-3,3;o]\frac{(x-2)^{4|1}}{3.4} - \ldots .$$

$$\ldots (-)^{p-1}[o,p;o]\frac{(x-p+1)^{p+1|1}}{p(p+1)}$$

aus den Elementen $x, x-1, x-2, x-3, \ldots..$

und nach 547

$$559) \quad = [p-1,1;o]\frac{x^{2|1}}{1.2} - [p-2,2;o]\frac{x^{3|1}}{2.3} + [p-3,3;o]\frac{x^{4|1}}{3.4} - \ldots .$$

$$\ldots . (-)^{p-1}[o,p;o]\frac{x^{p+1|1}}{p\ p+1)}$$

aus den Elementen $x+1, x+2, x+3, x+4, \ldots .$

§. 167.

Damit der Unterschied dieser acht verschiedenen Bildungsweisen bemerkbarer werde, so werde ein bestimmter Werth von p gewählt; es sey $p = 4$; die acht Summen für diese Reihe sind folgende

$$560) \quad 1^4+2^4+3^4+4^4+ \ldots +x^4 = \Sigma x^4 =$$

$$= \tfrac{1}{1}.1.1.1.1.x + \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1.1.1\\1.1.2\\1.2.2\\2.2.2\end{vmatrix} x(x-1) + \tfrac{1}{3}\begin{vmatrix}1.1\\1.2\\1.3\\2.2\\2.3\\3.3\end{vmatrix} x(x-1)(x-2) + \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix}1\\2\\3\\4\end{vmatrix} x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$+ \tfrac{1}{5}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

561) $$= -\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1.1.1\\1.1.2\\1.2.2\\2.2.2\end{vmatrix}x(x+1)+\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix}1.1\\1.2\\1.3\\2.2\\2.3\\3.3\end{vmatrix}x(x+1)(x+2-\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix}1\\2\\3\\4\end{vmatrix}x(x+1)(x+2)(x+3)+$$

$$+\tfrac{1}{5}x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

562) $$=\tfrac{1}{1}.xxxx.x-\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}x & x & x\\ x & x & (x-1)\\ x & (x-1)(x-1)\\ (x-1)(x-1)(x-1)\end{vmatrix}x(x-1)+\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix}x & x\\ x & (x-1)\\ x & (x-2)\\ (x-1)(x-1)\\ (x-1)(x-2)\\ (x-2)(x-2)\end{vmatrix}x(x-1)(x-2)$$

$$-\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix}x\\x-1\\x-2\\x-3\end{vmatrix}x(x-1)(x-2)(x-3)+\tfrac{1}{5}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

563) $$=\tfrac{1}{1}(x+1)(x+1)(x+1)(x+1).x-\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}(x+1)(x+1)(x+1)\\(x+1)(x+1)(x+2)\\(x+1)(x+2)(x+2)\\(x+2)(x+2)(x+2)\end{vmatrix}x(x+1)$$

$$+\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix}(x+1)(x+1)\\(x+1)(x+2)\\(x+1)(x+3)\\(x+2\ (x+2)\\(x+2)(x+3\\(x+3)(x+3)\end{vmatrix}x(x+1)(x+2-\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix}x+1\\x+2\\x+3\\x+4\end{vmatrix}x(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$+\tfrac{1}{5}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

564) $$= 1.1.1.\frac{(x+1)x}{2} + 1.1\begin{vmatrix}\frac{(x+1)x(x-1)}{3}\\ 1.2\\ 2.2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4}\\ 2\\ 3\end{vmatrix}$$

$$+\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)}{5}$$

565) $$= -1.1.1.\frac{x(x+1)}{2} + 1.1\begin{vmatrix}\frac{x(x+1)(x+2)}{3}\\ 1.2\\ 2.2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{4}\\ 2\\ 3\end{vmatrix}$$

$$+\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{5}$$

566) $$= xxx.\frac{(x+1)x}{1.2} - \begin{vmatrix} x & x & \frac{(x+1)x\,x-1)}{2.3}\\ x & (x-1) & \\ (x-1) & (x-1) & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{3.4}\\ x-1 & \\ x & 2\end{vmatrix}$$

$$-\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)x-3)}{4.5}$$

567) $$= (x+1)(x+1)(x+1)\frac{x(x+1)}{1.2} - (x+1)(x+1)\begin{vmatrix}\frac{x'x+1)(x+2)}{2.3}\\ (x+1)(x+2)\\ (x+2)(x+2)\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}x+1\\ x+2\\ x+3\end{vmatrix}\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{3.4} - \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{4.5}$$

Aus 523 ergibt sich noch eine neunte Summe, wenn $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$ $\ldots = 0$ und $n = 0$ gesetzt wird, nämlich

568) $$= 1.1.1.x^{5|1} + 1.1\times 3\,(x-1)^{5|1} + 1\times 2.2\,(x-2)^{5|1} + 1.1.1.(x-3)^{5|1}$$

1.2×2	2×1.2
2.2×1	3×1.1

Damit die Natur der letzten Bildungsweise deutlicher hervorleuchte, so mag die Summe der folgenden Reihe hier noch Platz finden

569) $$1^5+2^5+3^5+4^5+\ldots+x^5 = \Sigma x^5 =$$

$$= 1.1.1.1.x^{6|1} + 1.1.1\times 4\,(x-1)^{6|1} + 1.1\times 3.3\,(x-2)^{6|1} + 1\times 2.2.2\,(x-3)^{6|1}$$

$1.1.2\times 3$	1.2×2.3	$2\times 1.2.2$
$1.2.2\times 2$	1.3×2.2	$3\times 1.1.2$
$2.2.2\times 1$	2.2×1.3	$4\times 1.1.1$
	2.3×1.2	$+1.1.1.1.(x-4)^{6|1}$
	3.3×1.1	

Aus 539 folgt die zehnte Summirungsweise der obigen Reihe

570) $$1^4+2^4+3^4+\ldots+x^4 = \{1.1.1.1.1^{4|1} + 1.1.1.(x-3)\,1^{3|1}.1^{1|1}$$

$1.1.2.(x-2)$
$1.2.2(x-1)$
$2.2.2.x$

$$+ 1.1.(x-2)(x-2)\,1^{2|1}.1^{2|1} + 1.(x-1)(x-1)(x-1)\,1^{1|1}.1^{3|1}$$

$1.2.(x-1)(x-2)$	$2.x\ .\ (x-1)(x-1)$
$1.3.(x-1)(x-1)$	$3.x\ .\ x\ .\ (x-1)$
$2.2.\ x\ .\ (x-2)$	$4.x\ .\ x\ .\ x$
$2.3\ \ x\ .\ (x-1)$	
$3.3\ \ x\ .\ x$	

$$+ x.x.x.x.1^{4|1}\}.\frac{x}{1^{5|1}}$$

und aus 538 folgt die eilfte Summirungsweise, wenn $n = 1$ und $a = e$ gesetzt wird,

571) $$1^4+2^4+3^4+\ldots+x^4 = \left\{1.1.1.1^{3|1}+1.1.(x-2)\begin{vmatrix}1.2.(x-1)\\2.2.x\end{vmatrix}1^{2|1}.1^{2|1}\right.$$
$$\left.+1.(x-1)(x-1)\begin{vmatrix}2\,.\,x\,.\,(x-1)\\3\,.\,x\,.\,x\end{vmatrix}1^{1|1}.1^{3|1}+x.x.x.1^{4|1}\right\}\frac{x(x+1)}{1^{5|1}}$$

Diese mannigfaltigen Summirungsweisen einer und derselben Reihe, ihre Anzahl ist eilf, verdienen eine um desto grössere Aufmerksamkeit, da es bis jetzt Niemanden hat gelingen wollen, die Summe dieser Reihe anders als durch Bernoullische Zahlen auszudrücken. Unter diesen sind die letzten Summirungsweisen besonders durch die zweifachen geordneten Verbindungen mit Wiederholungen merkwürdig, sie erinnern an die zweifachen geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen im §. 2.

II. Abtheilung.

Summirung der Reihe

$$(1+a_x|p)\cdot\frac{u^{n+1|1}}{v^{1|1}}+(2+a_x|p)\cdot\frac{u^{n+2|1}}{v^{2|x}}+(3+a_x|p)\cdot\frac{u^{n+3|x}}{v^{3|x}}+\ldots+(x+a_x|p)\cdot\frac{u^{n+x|x}}{v^{x|x}}$$

§. 168.

Wir gehen zu allgemeineren Reihen über und legen hierbei folgende zum Grunde

572) $$\frac{u^{n+x|x}}{v^{x|x}}+\frac{u^{n+2|x}}{v^{2\,x}}+\ldots+\frac{u^{n+x|x}}{v^{x|x}}=\frac{u^{x+n+1|x}}{(u-v+n+1)v^{x|x}}-\frac{u^{n+1|x}}{u-v+n+1}$$

welche aus 384 leicht abzuleiten ist. Der zweite Theil dieser Summe entsteht, wenn in dem ersten Theile $x=o$ gesetzt wird; er ist von x unabhängig; wir wollen ihn durch $\mathfrak{B}_o$ vorstellen, wo die angehängte o den Werth von x bedeutet, welcher den zweiten Theil der Summe erzeugt. Es ist also

573) $$\Sigma\frac{u^{n+x|x}}{v^{x|1}}=\frac{u^{n+x+x|1}}{(u-v+n+1)v^{x|1}}-\mathfrak{B}_o$$

Diese Reihe geht in jene Reihe über, welche der ersten Abtheilung zum Grunde gelegt wurde, wenn $v=1$ nnd u eine ganze bejahete Zahl ist. Diese Einschränkung von u und v soll hier nicht statt finden, vielmehr sollen u und v jeden möglichen Werth annehmen können.

§. 169.

Mit den Gliedern dieser allgemeinen Reihe verbinden wir nach ihrer Folge die Producte

$$(1+a_1|p),\ (2+a_1|p),\ (3+a_1|p),\ \ldots\ (x+a_1|p)$$

und legen zur Summirung folgende Reihe vor

$$(1+a_1|p)\frac{u^{n+1|1}}{v^{1|1}}+(2+a_1|p).\frac{u^{n+2|1}}{v^{2|1}}+\ldots+(x+a_1|p).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = \Sigma(x+a_1|p).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}}$$

Das Verfahren, welches früher in der ersten Abtheilung zum Ziele führte, werde auch bei dieser allgemeinen Reihe beibehalten; es besteht in dem Zurückführen der späteren auf die unmittelbar vorhergehende Reihe. Trennen wir in dieser Hinsicht einen Factor von jedem Producte, so bemerken wir, dafs $x+a$ auf drei Arten mit dem Producte $\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}}$ in Verbindung gebracht werden kann; wir finden diese, wenn wir

$$x+a = A+B(u+n+x)$$
$$x+a = D+E(v+x-1)$$
$$x+a = G(u+n+x)+H(v+x-1)$$

und nun die Vorzahlen von x^1 und von x^0 gleichsetzen; wir erhalten folgende Werthe

$$A = a-u-n,\ B = 1$$
$$D = a-v+1,\ E = 1$$
$$G = \frac{a-v+1}{u-v+n+1},\ H = \frac{u-a+n}{u-v+n+1}$$

Das allgemeine Product kann also auf folgende drei verschiedene Weisen in zwei Producte

574) $$(x+a).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a-u-n).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}}+\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}$$

575) $$= (a-v+1).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}}+\frac{u^{n+x|1}}{v^{x-1|1}}$$

576) $$= \frac{a-v+1}{u-v+n+1}.\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}+\frac{u-a+n}{u-v+n+1}.\frac{u^{n+x|1}}{v^{x-1|1}}.$$

mithin auch die vorgelegte Reihe auf drei verschiedene Weisen in zwei

frühere Reihen zerlegt werden. Diese drei Zerfällungen geben eben so viele Bildungsweisen für die Summe der vorgelegten Reihe. Die erste von ihnen ist nach 574 folgende

$$577)\quad \Sigma(x+a_1|p)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-u-n)\Sigma(x+a_2|p-1)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}}+\Sigma(x+a_2|p-1)\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}$$

Nach dieser Vorschrift mufs in der Summe der unmittelbar vorhergehenden Reihe, in welcher jedes Glied ausser dem Bruche aus p—1 Factoren besteht, jede Stellenzahl von a um 1 erhöhet und diese Summe mit a_1-u-n vervielfacht werden, dann wieder in der Summe der vorhergehenden Reihe nicht allein jede Stellenzahl von a, sondern auch das n um 1 erhöhet werden. Fangen wir nun mit der ersten Reihe, wo p = 1 ist, an, und setzen wegen der Kürze den Bruch

$$578)\quad \frac{u^{n+x+1|1}}{(u-v+n+1)^{q|-1}.v^{x|1}} = f(n,x,q)$$

so finden wir, dafs

$$579)\quad \Sigma(x+a_1|1).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-u-n-o).f(n,x,1)+f(n+1,x,1)-\mathfrak{B}_o$$

$$580)\quad \Sigma(x+a_1|2)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-u-n-o)(a_2-u-n-o).f(n,x,1)$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-u-n-o \\ a_2-u-n-1 \end{vmatrix} f(n+1,x,1)+f(n+2,x,1)-\mathfrak{B}_o$$

$$581)\quad \Sigma(x+a_1|3)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-u-n-o)(a_2-u-n-o)(a_3-u-n-o)f(n,x,1)$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-u-n-o & a_2-u-n-o \\ a_1-u-n-o & a_3-u-n-1 \\ a_2-u-n-1 & a_3-u-n-1 \end{vmatrix} f(n+1,x,1)+\begin{vmatrix} a_1-u-n-o \\ a_2-u-n-1 \\ a_3-u-n-2 \end{vmatrix} f(n+2,x,1)+$$
$$+f(n+3,x,1)-\mathfrak{B}_o$$

nnd

582) $$\Sigma(x+a_1|4).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} =$$

$$= (a_1-u-n-o)(a_2-u-n-o)(a_3-u-n-o)(a_4-u-n-o).f(n,x,1)$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1-u-n-o & a_2-u-n-o & a_3-u-n-o \\ a_1-u-n-o & a_2-u-n-o & a_4-u-n-1 \\ a_1-u-n-o & a_3-u-n-1 & a_4-u-n-1 \\ a_2-u-n-1 & a_3-u-n-1 & a_4-u-n-1 \end{vmatrix} f(n+1,x,1) +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1-u-n-o & a_2-u-n-o \\ a_1-u-n-o & a_3-u-n-1 \\ a_1-u-n-o & a_4-u-n-2 \\ a_2-u-n-1 & a_3-u-n-1 \\ a_2-u-n-1 & a_4-u-n-2 \\ a_3-u-n-2 & a_4-u-n-2 \end{vmatrix} f(n+2,x,1) + \begin{vmatrix} a_1-u-n-o \\ a_2-u-n-1 \\ a_3-u-n-2 \\ a_4-u-n-3 \end{vmatrix} f(n+3,x,1) +$$

$$+f(n+4,x,1)-\mathfrak{B}_o$$

Das Gesetz dieser unabhängigen Bildungsweise liegt deutlich vor; die Stellenzahlen von a bilden die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, und die Zahlen o,1,2,3,4,..., welche allein stehen, die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen.

§. 170.

Die zweite Zerfällung des Products in 575 giebt die zweite zurücklaufende Bildungsweise für die Summe der vorgelegten Reihe, nämlich

583) $$\Sigma(x+a_1|p).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)\Sigma(x+a_2|p-1).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} +$$

$$+ \Sigma(x-1+1+a_2|p-1).\frac{u^{n+1+x-1|1}}{v^{x-1|1}}$$

Nach dem ersten Theile dieser Vorschrift werden in der Summe der vorhergehenden Reihe alle Stellenzahlen des a um 1 erhöhet, n und x bleiben unverändert; nach dem zweiten Theile wird die Stellenzahl des a,

so wie die Zahl, welche zugezählt wird, und auch n um 1 erhöhet, aber x um 1 vermindert. Wir erhalten nach dieser Vorschrift

584) $\Sigma(x+a_1|1).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)f(n,x,1)+f(n+1,x-1,1)-\mathfrak{B}_0$

585) $\Sigma(x+a_1|2).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)(a_2-v+1)f(n,x,1)+\begin{vmatrix} a_1-v+1 \\ a_2-v+2 \end{vmatrix} f(n+1,x-1,1)$
$+f(n+2,x-2,1)-\mathfrak{B}_0$

586) $\Sigma(x+a_1|3).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)(a_2-v+1)(a_3-v+1)f(n,x,1)+$
$+\begin{vmatrix} a_1-v+1 & a_2-v+1 \\ a_1-v+1 & a_3-v+2 \\ a_2-v+2 & a_3-v+2 \end{vmatrix} f(n+1,x-1,1)+\begin{vmatrix} a_1-v+1 \\ a_2-v+2 \\ a_3-v+3 \end{vmatrix} f(n+2,x-2,1)$
$+f(n+3,x-3,1)-\mathfrak{B}_0$

Die Stellenzahlen von a bilden hier wieder die geordnetcn Verbindungen ohne Wiederholungen, hingegen die Zahlen, welche allein stehen, die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen; nach diesem ist es leicht, die Summe der folgenden Reihe zu bilden:

587) $\Sigma(x+a_1|4).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)(a_2-v+1)(a_3-v+1)(a_4-v+1).f(n,x,1)$
$+\begin{vmatrix} a_1-v+1 & a_2-v+1 & a_3-v+1 \\ a_1-v+1 & a_2-v+1 & a_4-v+2 \\ a_1-v+1 & a_3-v+2 & a_4-v+2 \\ a_2-v+2 & a_3-v+2 & a_4-v+2 \end{vmatrix} f(n+1,x-1,1)+\begin{vmatrix} a_1-v+1 & a_2-v+1 \\ a_1-v+1 & a_3-v+2 \\ a_1-v+1 & a_4-v+3 \\ a_2-v+2 & a_3-v+2 \\ a_2-v+2 & a_4-v+3 \\ a_3-v+3 & a_4-v+3 \end{vmatrix} f(n+2,x-2,1)$
$+\begin{vmatrix} a_1-v+1 \\ a_2-v+2 \\ a_3-v+3 \\ a_4-v+4 \end{vmatrix} f(n+3,x-3,1)+f(n+4,x-4,1)-\mathfrak{B}_0$

§. 171.

Die dritte Zerlegung 576 giebt folgende sehr zusammengesetzte zurücklaufende Bildungsweise der vorgegebenen Reihe

$$588)\quad \Sigma(x+a_1|p)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = \frac{a_1-v+1}{u+n-v+1}\Sigma(x+a_2|p-1).\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}} +$$
$$+\frac{u+n-a_1}{u+n-v+1}\Sigma(x-1+1+a_2|p-1).\frac{u^{n+1+x-1|1}}{v^{x-1|1}}$$

Wir erhalten folgende Summen

$$589)\quad \Sigma(x+a_1|1)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)f(n+1,x,2)+(u+n+o-a_1)f(n+1,x-1,2)-\mathfrak{B}_o$$

$$590)\quad \Sigma(x+a_1|2).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)(a_2-v+1)f(n+2,x,3)+$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-v+1 & u+n+1-a_2 \\ a_2-v+2 & u+n+o-a_1 \end{vmatrix} f(n+2,x-1,3)+$$
$$(u+n+o-a_1)(u+n+o-a_2)f(n+2,x-2,3)-\mathfrak{B}_o$$

$$591)\quad \Sigma(x+a_1|3).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)(a_2-v+1)(a_3-v+1)f(n+3,x,4)$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-v+1 & a_2-v+1 & u+n+2-a_3 \\ a_1-v+1 & a_3-v+2 & u+n+1-a_2 \\ a_2-v+2 & a_3-v+2 & u+n+o-a_1 \end{vmatrix} f(n+3,x-1,4)$$
$$+\begin{vmatrix} a_1-v+1 & u+n+1-a_2 & u+n+1-a_3 \\ a_2-v+2 & u+n+o-a_1 & u+n+1-a_3 \\ a_3-v+3 & u+n+o-a_1 & u+n+o-a_2 \end{vmatrix} f(n+3,x-2,4)$$
$$+(u+n+o-a_1)(u+n+o-a_2)(u+n+o-a_3)f(n+3,x-3,4)-\mathfrak{B}_o$$

Für die Summe der nächsten Reihe machen wir folgende geordnete Verbindungen, sowohl ohne als mit Wiederholungen

1234	1111		
123	111	3	4
124	112	2	3
134	122	1	2
234	222	0	1
12	11	22	34
13	12	12	24
14	13	11	23
23	22	02	14
24	23	01	13
34	33	00	12
1	1	111	234
2	2	011	134
3	3	001	124
4	4	000	123
		0000	1234

und gruppiren sie auf die obige Weise

$$592)\quad \Sigma(x+a_1|4).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1-v+1)(a_2-v+1)(a_3-v+1)(a_4-v+1)f(n+4,x,5)$$

$$+\begin{vmatrix} a_1-v+1|a_2-v+1|a_3-v+1|u+n+3-a_4 \\ a_1-v+1|a_2-v+1|a_4-v+2|u+n+2-a_3 \\ a_1-v+1|a_3-v+2|a_4-v+2|u+n+1-a_2 \\ a_2-v+2|a_3-v+2|a_4-v+2|u+n+0-a_1 \end{vmatrix} f(n+4,x-1,5)$$

$$+\begin{vmatrix} a_1-v+1|a_2-v+1|u+n+2-a_3|u+n+2-a_4 \\ a_1-v+1|a_3-v+2|u+n+1-a_2|u+n+2-a_4 \\ a_1-v+1|a_4-v+3|u+n+1-a_2|u+n+1-a_3 \\ a_2-v+2|a_3-v+2|u+n+0-a_1|u+n+2-a_4 \\ a_2-v+2|a_4-v+3|u+n+0-a_1|u+n+1-a_3 \\ a_3-v+3|a_4-v+3|u+n+0-a_1|u+n+0-a_2 \end{vmatrix} f(n+4,x-2,5)$$

$$+\begin{vmatrix} a_1-v+1|u+n+1-a_2|u+n+1-a_3|u+n+1-a_4 \\ a_2-v+2|u+n+0-a_1|u+n+1-a_3|u+n+1-a_4 \\ a_3-v+3|u+n+0-a_1|u+n+0-a_2|u+n+1-a_4 \\ a_4-v+4\ u+n+0-a_1|u+n+0-a_2|u+n+0-a_3 \end{vmatrix} f(n+4,x-3,5)$$

$$+(u+n+0-a_1)(u+n+0-a_2)(u+n+0-a_3)(u+n+0-a_4)f(n+4,x-4,5)-\mathfrak{B}_0$$

§. 172.

Von der Summe der ersten Reihe hängt die Form der übrigen ab, jene, und zwar 577, kann noch drei verschiedene Formen annehmen. Bei dieser Umformung legen wir die zurücklaufende Bildungsweise

$$593)\quad \Sigma(x+a_1|p)\cdot\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_p-u-n)\Sigma(x+a_1|p-1)\cdot\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} + \\ +\Sigma(x+a_1|p-1)\cdot\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}$$

zum Grunde, und bewerkstelligen die Umformung selbst vermittelst der Gleichung

$$594)\quad (a_p-u-n)f(n+m,x-m,m+1)+f(n+m+1,x-m,m+1) = \\ = (a_p+x-m)f(n+m,x-m,m+1)-(m+1)f(n+m+1,x-m-1,m+2)$$

Setzen wir nun $p = 1$, $m = 0$, so wird

$$595)\quad \Sigma(x+a_1|1)\cdot\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1+x-o)f(n,x,1)-1^{1|1}f(n+1,x-1,2)-\mathfrak{B}_o$$

Ist $p = 2$, so wird aus 593

$$\Sigma(x+a_1|2)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_2-u-n)\Sigma(x+a_1|1)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}}\Sigma(x+a_1|1)\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}$$

Nach 595 erhalten wir zur Summe der Reihe folgende Producte

$$(a_1+x-o)\{(a_2-u-n)f(n,x,1)+f(n+1,x,1)\} \\ -1^{1|1}\{(a_2-u-n)f(n+1,x-1,2)+f(n+2,x-1,2)\}$$

Wird auf diese die Hülfsgleichung 594 angewendet, so gehen diese in Producte über, die ein einfacheres Gesetz befolgen, nämlich

$$596)\quad \Sigma(x+a_1|2)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1+x-o)(a_2+x-o)f(n,x,1)- \\ -\begin{vmatrix} a_1+x-o & 1^{1|1} \\ a_2+x-1 & \end{vmatrix} f(n+1,x-1,2)+1^{2|1}f(n+2,x-2,3)-\mathfrak{B}.$$

Eben so finden wir die Summe folgender Reihe

$$597)\quad \Sigma(x+a_1|3)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1+x-o)(a_2+x-o)(a_3+x-o)f(n,x,1)$$

$$-\begin{vmatrix} a_1+x-o & a_2+x-o \\ a_1+x-o & a_3+x-1 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 \end{vmatrix} 1^{1|1}f(n+1,x-1,2)+\begin{vmatrix} a_1+x-o \\ a_2+x-1 \\ a_3+x-2 \end{vmatrix} 1^{2|1}f(n+2,x-2,3)$$
$$-1^{3|1}f(n+3,x-3,4)-\mathfrak{B}_o$$

Die Stellenzahlen von a bilden die geordneten Verbinduugen ohne Wiederholungen, und die Zahlen, welche allein stehen, die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen; nach diesem Gesetz ist die Summe der folgenden Reihe leicht zu bilden, sie ist

$$598)\quad \Sigma(x+a_1|4)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1+x-o)(a_2+x-o)(a_3+x-o)(a_4+x-o)f(n,x,1)$$

$$-\begin{vmatrix} a_1+x-o & a_2+x-o & a_3+x-o \\ a_1+x-o & a_2+x-o & a_4+x-1 \\ a_1+x-o & a_3+x-1 & a_4+x-1 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 & a_4+x-1 \end{vmatrix} 1^{1|1}f(n+1,x-1,2)$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+x-o & a_2+x-o \\ a_1+x-o & a_3+x-1 \\ a_1+x-o & a_4+x-2 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 \\ a_2+x-1 & a_4+x-2 \\ a_3+x-2 & a_4+x-2 \end{vmatrix} 1^{2|1}f(n+2,x-2,3)-\begin{vmatrix} a_1+x-o \\ a_2+x-1 \\ a_3+x-2 \\ a_4+x-3 \end{vmatrix} 1^{3|1}f(n+3,x-3,4)$$
$$+1^{4|1}f(n+4,x-4,5)-\mathfrak{B}_o$$

§. 173.

Eine zweite Umformung findet statt vermittelst der Hülfsgleichung

$$599)\ (a_p-u-n)f(n+q-1,x,q)+f(n+q,x,q)=(a_p+x+q)f(n+q-1,x,q)-q.f(n+q,x,q+1)$$

Nach dieser wird aus 579

$$600\qquad \Sigma(x+a_1|1).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1+x+1)f(n,x,1)-1^{1|1}.f(n+1,x,2)-\mathfrak{B}_o$$

Die Summen der späteren Reihen werden nun vermittelst der Gleichungen 593 und 599 gefunden; nach 593 ist nämlich

$$\Sigma(x+a_1|2).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_2-u-n)\Sigma(x+a_1|1).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} + \Sigma(x+a_1|1)\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}$$

Diese Summe besteht nach 600 in den Producten

$$(a_1+x+1)\{(a_2-u-n)f(n,x,1)+f(n+1,x,1)\}$$
$$-1^{2|1}\{(a_2-u-n)f(n+1,x,2)+f(n+2,x,2)\}$$

welche nach 599 in folgende verwandelt werden

601) $$\Sigma(x+a_1|2).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1+x+1)(a_2+x+1)f(n,x,1) - \begin{vmatrix} a_1+x+1 \\ a_2+x+2 \end{vmatrix} 1^{1|1}f(n+1,x,2)$$
$$+1^{2|1}.f(n+2,x,3) - \mathfrak{B}_0$$

Das gleiche Verfahren findet bei den späteren Reihen statt; wir erhalten folgende Summen

602) $$\Sigma(x+a_1|3)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1+x+1)(a_2+x+1)(a_3+x+1).f(n,x,1)$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 & a_2+x+1 \\ a_1+x+1 & a_3+x+2 \\ a_2+x+2 & a_3+x+2 \end{vmatrix} 1^{1|1}f(n+1,x,2) + \begin{vmatrix} a_1+x+1 \\ a_2+x+2 \end{vmatrix} 1^{2|1}f(n+2,x,3) - 1^{3.1}f(n+3,x,4) - \mathfrak{B}_0$$

und

603) $$\Sigma(x+a_1|4)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = (a_1+x+1)(a_2+x+1)(a_3+x+1)(a_4+x+1).f(n,x,1)$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 & a_2+x+1 & a_3+x+1 \\ a_1+x+1 & a_2+x+1 & a_4+x+2 \\ a_1+x+1 & a_3+x+2 & a_4+x+2 \\ a_2+x+2 & a_3+x+2 & a_4+x+2 \end{vmatrix} 1^{1|1}f(n+1,x,2) + \begin{vmatrix} a_1+x+1 & a_2+x+1 \\ a_1+x+1 & a_3+x+2 \\ a_1+x+1 & a_4+x+3 \\ a_2+x+2 & a_3+x+2 \\ a_2+x+2 & a_4+x+3 \\ a_3+x+3 & a_4+x+3 \end{vmatrix} 1^{1|1}f(n+2,x,3) -$$

$$-\left|\begin{matrix} a_1+x+1 \\ a_2+x+2 \\ a_3+x+3 \\ a_4+x+4 \end{matrix}\right| 1^{3|1}f(n+3,x,4)+1^{4|1}f(n+4,x,5)-\mathfrak{B}_0$$

§. 174.

Die dritte Ve rwandlung wird durch die Hülfsgleichung

604) $$(a_p-u-n)u^{n+x+1|1}f'(s-1,h)+u^{n+x+2|1}f'(s,h) =$$
$$= \{(a_p+x-h+1)f(s,h)+h.(a_p-v+s-h).f'(s,h+1)\}.u^{n+x+1|1}$$

wo $\frac{1}{(u-v+n+s)^{h|-1}} = f'(s,h)$ ist, vollbracht.

Die Summe 579 der ersten Reihe geht hierdurch in folgende über

605) $$\Sigma(x+a_1|1)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = \{(a_1+x)f'(2,1)+(a_1-v+1)1^{1|1}f'(2,2)\}\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}-\mathfrak{B}_0$$

Zur Bildung der Summe der nächstfolgenden Reihe giebt die Gleichung 593 die Anweisung, wir erhalten die Producte

$$(a_1+x)\{(a_2-u-n)f'(2,1).u^{n+x+1|1}+f'(3,1).u^{n+x+2|1}\}\frac{1}{v^{x|1}}$$

$$+(a_1-v+1)1^{1|1}\{(a_2-u-n)f'(2,2).u^{n+x+1|1}+f'(3,2).u^{n+x+2|1}\}\frac{1}{v^{x|1}}$$

die nach 604 in folgende verwandelt werden

606) $$\Sigma(x+a_1|2).\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = \{(a_1+x-o)(a_2+x-o)f'(3,1)$$

$$+\left|\begin{matrix} a_1+x-o & a_2-v+2 \\ a_2+x-1 & a_2-v+1 \end{matrix}\right| 1^{1|1}f'(3,2)+(a_1-v+1)(a_2-v+1)1^{2|1}f'(3,3)\}\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}-\mathfrak{B}_0$$

und eben so finden wir, dafs

607) $$\Sigma(x+a_1|3)\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = \{(a_1+x-o)(a_2+x-o)(a_3+x-o)f'(4,1)$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+x-o & a_2+x-o & a_3-v+3 \\ a_1+x-o & a_3+x-1 & a_2-v+2 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 & a_1-v+1 \end{vmatrix} 1^{1|1|1} f'(4,2)+\begin{vmatrix} a_1+x-o & a_2-v+2 & a_3-v+2 \\ a_2+x-1 & a_1-v+1 & a_3-v+2 \\ a_3+x-2 & a_1-v+1 & a_2-v+1 \end{vmatrix} 1^{2|1|1} f'(4,3)$$

$$+(a_1-v+1)(a_2-v+1)(a_3-v+1)1^{3|1|1} f'(4,4)\}\frac{u^{n+x+1|1}}{v^{x|1}}-\mathfrak{B}_o$$

§. 175.

Von der grossen Allgemeinheit, worin wir die Untersuchung gehalten haben, gehen wir jetzt zu besondern Fällen über. Setzen wir $a_1 = a$, $a_2 = a+1$, $a_3 = a+2$, $a_4 = a+3$, . . . so entsteht aus 582 die Reihe

608) $$\Sigma(x+a)^{p|1}.\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = p_{,}^{o|-1}(a-u-n)^{p|1} f(n,x,1)$$

$$+p_{,}^{x|-1}(a-u-n)^{p-1|1} f(n+1,x,1)+p_{,}^{2|-1}(a-u-n)^{p-2|1} f(n+2,x,1)$$

$$+ \ldots . +p_{,}^{p|-1}(a-u-n)^{o|1} f(n+p,x,1)-\mathfrak{B}_o$$

aus 598

609) $$= p^{o|-1}(a+x)^{p|1} f(n,x,1)-p^{1|-1}(a+x)^{p-1|1} f(n+1,x-1,2)$$

$$+p^{2|-1}(a+x)^{p-2|1} f(n+2,x-2,3)-\ldots . (-)^p p^{p|-1}(a+x)^{o|1} f(n+p,x-p,p+1)-\mathfrak{B}_o$$

und wird $a_1 = a+p-1$, $a_2 = a+p-2, \ldots, a_p = a$ gesetzt, so wird dieselbe Reihe nach 587

610) $$= p_{,}^{o|-1}(a-v+1)^{p|1} f(n,x,1)+p_{,}^{x|-1}(a-v+2)^{p-x|1} f(n+1,x-1,1)$$

$$+p_{,}^{2|-1}(a-v+3)^{p-2|1} f(n+2,x-2,1)+\ldots +p_{,}^{p|-1}(a-v+p+1)^{o|1} f(n+p,x-p,1)-\mathfrak{B}_o$$

und nach 603

611) $$= p^{o|-1}(a+x+1)^{p|1} f(n,x,1)-p^{1|-1}(a+x+2)^{p-1|1} f(n+1,x,2)$$

$$+p^{2|-1}(a+x+3)^{p-2|1} f(n+2,x,3)-\ldots (-)^p p^{p|-1}(a+x+p+1)^{o|1} f(n+p,x,p+1)-\mathfrak{B}_o$$

Nehmen wir ferner $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \ldots$, so erhalten wir folgende Summen

aus 582

612) $$\Sigma(x+a)^p.\frac{u^{n+x|1}}{v^{x|1}} = [p,1;o]f(n,x,1)+[p-1,2;o]f(n+1,x,1)$$

$$+[p-2,3;o]f(n+2,x,1)+\ldots +[o,p+1;o]f(n+p,x,1)-\mathfrak{B}_o$$

aus den Elementen

$$a-u-n-o,\ a-u-n-1,\ a-u-n-2,\ a-u-n-3,\ \ldots\ldots$$

aus 587

613) $$= [p,1;o]f(n,x,1)+[p-1,2;o]f(n+1,x-1,1)+[p-2,3;o]f(n+2,x-2,1)$$
$$+ \ldots [o,p+1;o]f(n+p,x-p,1)-\mathfrak{B}_o$$

aus den Elementen

$$a-v+1,\ a-v+2,\ a-v+3,\ a-v+4,\ \ldots\ldots$$

aus 598

614) $$= [p,1;o]f(n,x,1)-[p-1,2;o]1^{x|1}f(n+1,x-1,2)+[p-2,3;o]1^{2|1}f(n+2,x-2,2)$$
$$- \ldots (-)^p[o,p+1;o]1^{p|1}f(n+p,x-p,p+1)-\mathfrak{B}_o$$

aus den Elementen

$$a+x-o,\ a+x-1,\ a+x-2,\ a+x-3,\ \ldots\ldots$$

und aus 603

615) $$= [p,1;o]f(n,x.1)-[p-1,2;o]1^{x|x}f(n+1,x,2)+[p-2,3;o]1^{2|1}f(n+2,x,3)$$
$$- \ldots\ldots (-)^p 1^{p|x}f(n+p,x,p+1)-\mathfrak{B}_o$$

aus den Elementen

$$a+x+1,\ a+x+2,\ a+x+3,\ a+x+4,\ \ldots\ldots$$

§. 176.

Die Grösse n giebt der Untersuchung keine grössere Allgemeinheit, sie ist deshalb eingeführt, damit der Uebergang von der Summe der vorhergehenden zu der Summe der unmittelbar folgenden Reihe mit grösserer Leichtigkeit geschehe.

In der ersten Abtheilung wurde keine Grösse $\mathfrak{B}_o$, welche entsteht, wenn in der Summe $x = o$ gesetzt wird, abgezählt, und obgleich die Reihen in der ersten Abtheilung in den allgemeinen Reihen der zweiten

Abtheilung enthalten sind, so entstehen doch nicht jene Summen aus diesen dadurch, dafs $v = 1$ und

$$\frac{u^{x|1}}{1^{x|1}} = \frac{(x+1)^{u-x|1}}{1^{u-x|1}}$$

gesetzt wird, denn die beständige Grösse $\mathfrak{B}_0$ würde dadurch nicht verschwinden. Damit aber diese verschwinde, so werde sowohl die Reihe, als auch ihre Summe durch v gemessen und dann $v = 0$ gesetzt. Wenn dieses geschieht, so verschwindet $\mathfrak{B}_0$, denn

$$\frac{1}{1^{-1|1}} = 0$$

Da diese Geschäfte leicht auszuführen sind, so wollen wir uns nicht länger bei ihnen aufhalten.

III. Abtheilung.

Summirung der Reihe

$$(0+a_1|p).z^0.n_{,}^{0|-1}+(1+a_1|p).z^1.n_{,}^{1|-1}+\ldots+(x+a_1|p).z^x.n_{,}^{x|-1}+\ldots$$
$$\ldots+(n+a_1|p)z^n.n_{,}^{n|-1}$$

§. 177.

Diese Reihe können wir auf drei verschiedene Arten in zwei andere Reihen zerlegen; denn trennen wir den ersten Factor $x+a_1$ vom Product und verbinden ihn mit $n_{,}^{x|-1}$, so kann dieses auf folgende Art geschehen

$$(x+a_1).n_{,}^{x|-1} = a_1.n_{,}^{x|-1}+n.(n-1)_{,}^{x-1|-1}$$
$$= (a_1+n).n_{,}^{x|-1}-n.(n-1)_{,}^{x|-1}$$
$$= a_1.(n-1)_{,}^{x|-1}+(a_1+n).(n-1)_{,}^{x-1|-1}$$

Es ist also auch

616) $$\Sigma(x+a_1|p)z^x n_{,}^{x|-1} = a_1\Sigma(x+a_2|p-1)z^x n_{,}^{x|-1} + nz\Sigma(x+a_2|p-1)z^{x-1}(n-1)_{,}^{x-1|-1}$$

617) $$= (a_1+n)\Sigma(x+a_2|p-1)z^x n_{,}^{x|-1}-n\Sigma(x+a_2|p-1)z^x(n-1)_{,}^{x|-1}$$

618) $$= a_1\Sigma(x+a_2|p-1)z^x(n-1)_{,}^{x|-1}+(a_1+n)z\Sigma(x+a_2|p-1)z^{x-1}(n-1)_{,}^{x-1|-1}$$

§. 178.

Es ist bekannt, dafs fur jeden Werth von n

619) $$\Sigma z^x.n_{,}^{x|-1} = (1+z)^n = U^n$$

wenn $1+z = U$ gesetzt wird.

Die erste Vorschrift zur Bildung der Summen ist für die nächste Reihe

$$\Sigma(x+a_1|1)z^x n_,^{x|-1} = a_1\Sigma z^x n_,^{x|-1}+nz\Sigma z^{x-1}(n-1)_,^{x-1|-1}$$

Sie giebt folgende Summe

620) $$\Sigma(x+a_1|1)z^x n_,^{x|-1} = a_1 U^n+nz^1.U^{n-1}$$

Die Summe der nächsten Reihe wird nach der Gleichung

$$\Sigma(x+a_1|2)z^x n_,^{x|-1} = a_1\Sigma(x+a_2|1)z^x n_,^{x|-1}+nz\Sigma(x+a_2|1)z^{x-1}(n-1)_,^{x-1|-1}$$

gebildet, wenn zuerst in der Summe der vorigen Reihe die Stellenzahl von a erhöhet und die Summe mit a_1 vervielfacht , und dann in der Summe der vorigen Reihe $n-1$ statt n und $1+a_2$ statt a_1 gesetzt, und die Summe mit nz vervielfacht wird. Wir erhalten hierdurch folgende Summe

621) $$\Sigma(x+a_1|2)z^x n_,^{x|-1} = (a_1+o)(a_2+o)U^n+\begin{vmatrix} a_1+o & n^{1|-1}z^1U^{n-1}+n^{2|-1}z^2U^{n-2} \\ a_2+1 \end{vmatrix}$$

Nach derselben Vorschrift werden die Summen der spätern Reihen gebildet; es entstehen folgende Summen

622) $$\Sigma(x+a_1|3)z^x n_,^{x|-1} = (a_1+o)(a_2+o)(a_3+o)U^n+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & n^{1|-1}z^1U^{n-1} \\ a_1+o & a_3+1 \\ a_2+1 & a_3+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+o & n^{2|-1}z^2U^{n-2}+n^{3|-1}z^3U^{n-3} \\ a_2+1 \\ a_3+2 \end{vmatrix}$$

und

623) $$\Sigma(x+a_1|4)z^x n_,^{x|-1} = (a_1+o)(a_2+o)(a_3+o)(a_4+o)U^n+$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & a_3+o & n^{1|-1}z^1U^{n-1} \\ a_1+o & a_2+o & a_4+1 \\ a_1+o & a_3+1 & a_4+1 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_4+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & n^{2|-1}z^2U^{n-2} \\ a_1+o & a_3+1 \\ a_1+o & a_4+2 \\ a_2+1 & a_3+1 \\ a_2+1 & a_4+2 \\ a_3+2 & a_4+2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+o & n^{3|-1}z^3U^{n-3}+ \\ a_2+1 \\ a_3+2 \\ a_4+3 \end{vmatrix}$$

$$+ n^{4|-1}z^4U^{n-4}$$

Das Bildungsgesetz dieser Summen liegt deutlich vor; die Stellenzahlen von

a bilden die geordneten Verbindungen ohne, und die Zahlen, welche allein stehen, die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen.

§. 179.

Die zweite Vorschrift 617 zur Bildung der Summen giebt folgende Summen

624) $$\Sigma(x+a_1|1)z^x n^{\underline{x|-1}} = (a_1+n)U^n - nU^{n-1}$$

Die Summe jeder folgenden Reihe wird aus der Summe der ihr zunächst vorhergehenden Reihe gebildet, und zwar ihr erster Theil, wenn in der vorhergehenden Summe die Stellenzahlen von a um 1 erhöhet, und die Summe mit a_1+n vervielfacht wird, der zweite Theil, wenn die Stellenzahlen von a um 1 erhöhet, aber n um 1 erniedrigt, und die Summe mit $-n$ vervielfacht wird. Nach dieser Vorschrift entstehen folgende Summen

625) $$\Sigma(x+a_1|2)z^x n^{\underline{x|-1}} = (a_1+n)(a_2+n)U^n - \begin{vmatrix} a_1+n-o \end{vmatrix} n^{\underline{1|-1}}U^{n-1} + n^{\underline{2|-1}}U^{n-2}$$
$$\begin{vmatrix} a_2+n-1 \end{vmatrix}$$

und

626) $$\Sigma(x+a_1|3)z^x n^{\underline{x|-1}} = (a_1+n-o)(a_2+n-o)(a_3+n-o)U^n -$$
$$- \begin{vmatrix} a_1+n-o & a_2+n-o \\ a_1+n-o & a_3+n-1 \\ a_2+n-1 & a_3+n-1 \end{vmatrix} n^{\underline{1|-1}}U^{n-1} + \begin{vmatrix} a_1+n-o \\ a_2+n-1 \\ a_3+n-2 \end{vmatrix} n^{\underline{2|-1}}U^{n-2} - n^{\underline{3|-1}}U^{n-3}$$

ferner

627) $$\Sigma(x+a_1|4)z^x n^{\underline{x|-1}} = (a_1+n-o)(a_2+n-o)(a_3+n-o)(a_4+n-o)U^4$$
$$- \begin{vmatrix} a_1+n-o & a_2+n-o & a_3+n-o \\ a_1+n-o & a_2+n-o & a_4+n-1 \\ a_1+n-o & a_3+n-1 & a_4+n-1 \\ a_2+n-1 & a_3+n-1 & a_4+n-1 \end{vmatrix} n^{\underline{1|-1}}U^{n-1} + \begin{vmatrix} a_1+n-o & a_2+n-o \\ a_1+n-o & a_3+n-1 \\ a_1+n-o & a_4+n-2 \\ a_2+n-1 & a_3+n-1 \\ a_2+n-1 & a_4+n-2 \\ a_3+n-2 & a_4+n-2 \end{vmatrix} n^{\underline{2|-1}}U^{n-2}$$

$$- \begin{vmatrix} a_1+n-o \end{vmatrix} n^{3|-1}U^{n-3} + n^{4|-1}U^{n-4}$$
$$\begin{vmatrix} a_2+n-1 \\ a_3+n-2 \\ a_4+n-3 \end{vmatrix}$$

§. 180.

Die dritte Vorschrift 618 giebt folgende Summen

628) $$\Sigma(x+a_i|1)z^x n^{x|-1} = \{(a_1+o)z^o+(a_1+n)z^1\}U^{n-1}$$

629) $$\Sigma(x+a_1|2)z^x n^{x|-1} = \{(a_1+o)(a_2+o)z^o+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+n-1 \\ a_2+1 & a_1+n-o \end{vmatrix} z^1 + (a_1+n-o)(a_2+n-o)z^2\}U^{n-2}$$

630) $$\Sigma(x+a_i|3)z^x n^{x|-1} = \{(a_1+o)(a_2+o)(a_3+o)z^o + \begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & a_3+n-2 \\ a_1+o & a_3+1 & a_2+n-1 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_2+n-o \end{vmatrix} z^1 + \begin{vmatrix} a_1+o & a_2+n-1 & a_3+n-1 \\ a_2+1 & a_1+n-o & a_3+n-1 \\ a_3+2 & a_1+n-o & a_2+n-o \end{vmatrix} z^2 + (a_1+n-o)(a_2+n-o)(a_3+n-o)z^3\}U^{n-3}$$

Die Bildung dieser Summe ist zusammengesetzter, als die beiden vorigen, denn hier entstehen vierfache Verbindungen, welche schon früher vorgekommen sind. Die Summe der vierten Reihe ist

631) $$\Sigma(x+a_i|4)z^x n^{x|-1} = \{(a_1+o)(a_2+o)(a_3+o)(a_4+o)z^o + \begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & a_3+o & a_4+n-3 \\ a_1+o & a_2+o & a_4+1 & a_3+n-2 \\ a_1+o & a_3+1 & a_4+1 & a_2+n-1 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_4+1 & a_1+n-o \end{vmatrix} z^1 + \begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & a_3+n-2 & a_4+n-2 \\ a_1+o & a_3+1 & a_2+n-1 & a_4+n-2 \\ a_1+o & a_4+2 & a_2+n-1 & a_3+n-1 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_1+n-o & a_4+n-2 \\ a_2+1 & a_4+2 & a_1+n-o & a_3+n-1 \\ a_3+2 & a_4+2 & a_1+n-o & a_2+n-o \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+n-1 & a_3+n-1 & a_4+n-1 \\ a_2+1 & a_1+u-o & a_3+n-1 & a_4+n-1 \\ a_3+2 & a_1+n-o & a_2+n-o & a_4+n-1 \\ a_4+3 & a_1+n-o & a_2+n-o & a_3+n-o \end{vmatrix} z^3 +$$

$$+ (a_1+n-o)(a_2+n-o)(a_3+n-o)(a_4+n-o)z^4\}U^{n-4}$$

§. 181.

Es ist merkwürdig, dafs alle diese Reihen von 619 bis 631 verschwinden, wenn $z = -1$ und p kleiner als n ist; oder dafs

632) $$(o+a_1|n-q)n^{o|-1}-(1+a_1|n-q)n^{1|-1}$$
$$+(2+a_1|n-q)n^{2|-1}-(3+a_1|n-q)n^{3|-1}+\ldots(-)^n(n+a_1|n-q)n^{n|-1} = o$$

Ist aber $n = p$, so bleibt von der Summe jeder Reihe das letzte Glied übrig, denn $o^o = 1$, oder es ist

633) $$(o+a_1|n)n^{o|-1}-(1+a_1|n)n^{1|-1}+(2+a_1|n)n^{2|-1}\ldots(-)^n(n+a_1|n)n^{n|-1}$$
$$= (-)^n.1^{n|1}$$

Der fernere Fortgang der Rechnung wird durch die ursprüngliche Gleichung 616 geleitet; wir erhalten aus dieser Gleichung folgende

$$\Sigma(x+a_1|n+1)(-)^x n^{x|-1} =$$
$$= a_1\Sigma(x+a_2|n(-)^x n^{x|-1}-n\Sigma(x+a_2|n)(-)^{x-1}(n-1)^{x-1|-1}$$

und hieraus, wenn wir von $n = o$ anfangen und zu $n=1, =2, =3, ..$ übergehen, die Summe der nächstfolgenden Reihe

634) $$\Sigma(x+a_1|n+1)(-)^x n^{x|-1} = (-)^n.1^{n|1}\begin{vmatrix} o+a_1 \\ 1+a_2 \\ 2+a_3 \\ 3+a_4 \\ \ldots \\ n+a_{n+1} \end{vmatrix}$$

Aus der Gleichung

$$\Sigma(x+a_1|n+2)(-)^x n^{x|-1} =$$

$$= a_1\Sigma(x+a_2|n+1)(-)^x n^{x|-1} - n\Sigma(x+a_2|n+1)(-)^{x-1}(n-1)^{x-1|-1}$$

erhalten wir die Summen

$$\Sigma(x+a_1|2)(-)^x o^{x|-1} = +1^{o|1}(o+a_1)(o+a_2)$$

$$\Sigma(x+a_1|3)(-)^x 1^{x|-1} = -1^{1|1}\begin{vmatrix} o+a_1 & o+a_2 \\ o+a_1 & 1+a_3 \\ 1+a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma(x+a_1|4)(-)^x 2^{x|-1} = +1^{2|1}\begin{vmatrix} o+a_1 & o+a_2 \\ o+a_1 & 1+a_3 \\ o+a_1 & 2+a_4 \\ 1+a_2 & 1+a_3 \\ 1+a_2 & 2+a_4 \\ 2+a_3 & 2+a_4 \end{vmatrix}$$

und überhaupt

635) $$\Sigma(x+a_1|n+2)(-)^x n^{x|-1} = (-)^n 1^{n\,1}\begin{vmatrix} o+a_1 & o+a_2 \\ \cdots & \cdots \\ o+a_1 & n+a_{n+2} \\ 1+a_2 & 1+a_3 \\ \cdots & \cdots \\ 1+a_2 & n+a_{n+2} \\ 2+a_2 & 2+a_4 \\ \cdots & \cdots \\ n+a_{n+1} & n+a_{n+2} \end{vmatrix}$$

Die Gleichung

$$\Sigma(x+a_1|n+3)(-)^x n^{x|-1} =$$

$$= a_1\Sigma(x+a_1|n+2)(-)^x n^{x|-1} - n\Sigma(x+a_2|n+2)(-)^{x-1}(n-1)^{x-1|-1}$$

führt zu ähnlichen Gebilden; wir finden, dafs

$$\Sigma(x+a_1|3)(-)^x o^{x|-1} = 1^{o|1}(o+a_1)(o+a_2)(o+a_3)$$

$$\Sigma(x+a_1|4)(-)^x 1^{x|-1} = -1^{1|1}\begin{vmatrix} o+a_1|o+a_2|o+a_3 \\ o+a_1|o+a_2|1+a_4 \\ o+a_1|1+a_3|1+a_4 \\ 1+a_2|1+a_3|1+a_4 \end{vmatrix}$$

und

636) $$\Sigma(x+a_1|5)(-)^x 2^{x|-1} = +1^{2|1}\begin{vmatrix} o+a_1|o+a_2|o+a_3 \\ o+a_1|o+a_2|1+a_4 \\ o+a_1|o+a|2+a_5 \\ o+a_1|1+a_3|1+a_4 \\ o+a_1|1+a_3|2+a_5 \\ o+a_1|2+a_4|2+a_5 \\ 1+a_2|1+a_3|1+a_4 \\ 1+a_2|1+a_3|2+a_5 \\ 1+a_2|2+a_4|2+a_5 \\ 2+a_3|2+a_4|2+a_5 \end{vmatrix}$$

u. s. w. Ueberhaupt die Summe der Reihe

$$(o+a_1|n+q)n^{o|-1} - (1+a_1|n+q)n^{1|-1} + (2+a_1|n+q)n^{2|-1} - \ldots (n+a_1|n+q)n^{n|-1}$$

wird gebildet aus allen geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen o,1,2,3,.... n zu q Elementen, und aus allen geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen 1,2,3,...,n+q zu q Elementen; beide Verbindungsarten werden auf vorstehende Weise vereinigt, und das Ganze mit $(-)^{n+1}n^{n|1}$ vervielfacht.

§. 182.

Wir gehen zu besondern Fällen über und setzen

$$a_1 = \frac{a+3k}{h},\ a_2 = \frac{a+2k}{h},\ a_3 = \frac{a+1k}{h},\ a_4 = \frac{a}{h}$$

wir erhalten folgende Reihe und Summe aus 623 .

637) $a^{(1|k}n_{,}^{0|-1}z^{0}+(a+h)^{(1|k}n_{,}^{1|-1}z^{1}+(a+2h)^{(1|k}n_{,}^{2|-1}z^{2}+\ldots+(a+nh)^{(1|k}n_{,}^{n|-1}z^{n} =$

$= a(a+k)(a+2k)(a+3k)U^{n}+\begin{vmatrix} a+3k+oh & a+2k+oh & a+1k+oh \\ a+3k+oh & a+2k+oh & a+ok+1h \\ a+3k+oh & a+1k+1h & a+ok+1h \\ a+2k+1h & a+1k+1h & a+ok+1h \end{vmatrix} n^{1|-1}zhU^{n-1}$

$$+\begin{vmatrix} a+3k+oh & a+2k+oh \\ a+3k+oh & a+1k+1h \\ a+3k+oh & a+ok+2h \\ a+2k+1h & a+1k+1h \\ a+2k+1h & a+ok+2h \\ a+1k+2h & a+ok+2h \end{vmatrix} n^{2|-1}z^{2}h^{2}U^{n-2}+\begin{vmatrix} a+3k+oh \\ a+2k+1h \\ a+1k+2h \\ a+ok+3h \end{vmatrix} n^{3|-1}z^{3}h^{3}U^{n-3}+n^{4|-1}z^{4}h^{4}U^{n-4}$$

und aus 627, wenn $a+nh = u$ gesetzt wird

638) $= (u-oh+3k\,|\,u-oh+2k\,|\,u-oh+k\,|\,u-oh+ok)U^{n}$

$$-\begin{vmatrix} u-oh+3k & u-oh+2k & u-oh+1k \\ u-oh+3k & u-oh+2k & u-1h+ok \\ u-oh+3k & u-1h+1k & u-1h+ok \\ u-1h+2k & u-1h+1k & u-1h+ok \end{vmatrix} n^{1|-1}h^{1}U^{n-1}$$

$$+\begin{vmatrix} u-oh+3k & u-oh+2k \\ u-oh+3k & u-1h+1k \\ u-oh+3k & u-2h+ok \\ u-1h+2k & u-1h+1k \\ u-1h+2k & u-2h+ok \\ u-2h+1k & u-2h+ok \end{vmatrix} n^{2|-1}h^{2}U^{n-2}-\begin{vmatrix} u-oh+3k \\ u-1h+2k \\ u-2h+1k \\ u-3h+ok \end{vmatrix} n^{3|-1}h^{3}U^{n-5}+n^{4|-1}h^{4}U^{n-4}$$

oder wenn wir $a_1 = \frac{a}{h}$, $a_2 = \frac{a+k}{h}$, $a_3 = \frac{a+2k}{h}$, $a_4 = \frac{a+3k}{h}$, setzen,

aus 627

639) $$= (u-oh+ok)(u-oh+1k)(u-oh+2k)(u-oh+3k)U^n$$
$$-\begin{vmatrix} u-oh+ok & u-oh+1k & u-oh+2k \\ u-oh+ok & u-oh+1k & u-1h+3k \\ u-oh+ok & u-1h+2k & u-1h+3k \\ u-1h+1k & u-1h+2k & u-1h+3k \end{vmatrix} n^1|^{-1}hU^{n-1}+$$
$$+\begin{vmatrix} u-oh+ok & u-oh+1k \\ u-oh+ok & u-1h+2k \\ u-oh+ok & u-2h+3k \\ u-1h+1k & u-1h+2k \\ u-1h+1k & u-2h+3k \\ u-2h+2k & u-2h+3k \end{vmatrix} n^{2|-1}h^2U^{n-2} - \begin{vmatrix} u-oh+ok \\ u-1h+1k \\ u-2h+2k \\ u-3h+3k \end{vmatrix} n^{3|-1}h^3U^{n-3}+n^{4|-1}h^4U^{n-4}$$

Eine ähnliche Summe ergiebt sich aus 631.

Ist $h = k$, so kann die Summe durch folgende Zeichen dargestellt werden: nach 637

640) $$a^{p|h}n_{,}^{o|-1}z^o+(a+h)^{p|h}n_{,}^{1|-1}z^1+(a+2h)^{1|h}n_{,}^{2|-1}z^2+\ldots+(a+nh)^{p|h}n_{,}^{n|-1}z^n =$$
$$= a^{p|h}U^n+p_{,}^{1|-1}(a+h)^{p-1|h}n^{1|-1}z^1h^1U^{n-1}+p_{,}^{2|-1}(a+2h)^{p-2|h}n^{2|-1}z^2h^2U^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+p_{,}^{p|-1}(a+nh)^{o|h}n^{p|-1}z^ph^pU^{n-p}$$

und nach 639

641) $$= (a+nh)^{p|h}U^n - p_{,}^{1|-1}(a+nh)^{p-1|h}n^{1|-1}hU^{n-1} +$$
$$\ldots. (-)^p.p_{,}^{p|-1}(a+nh)^{o|h}n^{p|-1}h^pU^{n-p}$$

§. 183.

Ist $k = o$, so ist nach 637

642) $$a^pn_{,}^{o|-1}z^o+(a+h)^pn_{,}^{1|-1}z^1+(a+2h)^pn_{,}^{2|-1}z^2+\ldots+(a+nh)^pn_{,}^{n|-1}z^n =$$
$$= [p,1;o]U^n+[p-1,2;o]n^{1|-1}z^1h^1U^{n-1}+[p-2,3;o]n^{2|-1}z^2h^2U^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+[p-p,p+1;o]n^{p|-1}z^ph^pU^{n-p}$$

aus den Elementen a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, $a+4h$, ...

und nach 639

643) $$= [p,1;o]U^n - [p-1,2;o]n^{1|-1}hU^{n-1} + [p-2,3;o]u^{2|-1}h^2U^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots (-)^p[p-p,p+1;o]n^{p|-1}h^pU^{n-p}$$

aus den Elementen $a+nh$, $a+nh-h$, $a+nh-2h$, $a+nh-3h$, ...

§. 184.

Ist $z = -1$ und $a_1 = a+n+q-1$, $a_2 = a+n+q-2$, $a_3 = a+n+q-3$, ..., $a_{n+q} = a$, so ist nach 635

644) $$a^{n+q|1}n_{,}^{o|-1} - (a+1)^{n+q|1}n_{,}^{1|-1} + (a+2)^{n+q|1}n_{,}^{2|-1} - \ldots$$
$$\ldots (-)^n(a+n)^{n+q|1}n_{,}^{n|-1} = (-)^n 1^{n|1}(a+n)^{q|1}$$

Ist aber $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a$, so ist nach 635

645) $$a^{n+q}n_{,}^{o|-1} - (a+1)^{n+q}n_{,}^{1|-1} + (a+2)^{n+q}n_{,}^{2|-1} - \ldots (-)^n(a+n)^{n+q}n_{,}^{n|-1} =$$
$$= (-)^n 1^{n|1}[q,n;o]$$

aus den Elementen a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, ..., $a+n$

§. 185.

Ist $a = n$, $z = 1$ und $h = -2$, so ist die Summe der Reihe 642 für ein ungerades p und ein ganzes bejahetes n, $= o$; denn die Glieder, welche von den Enden gleichweit entfernt sind, heben sich auf; allein für ein gerades $p = 2p$ ist die Summe folgende

646) $$n^{2p}n_{,}^{o|-1} + (n-2)^{2p}n_{,}^{1|-1} + (n-4)^{2p}n_{,}^{2|-1} + \ldots + (n-2n)^{2p}n_{,}^{n|-1} =$$
$$= [2p,1;o]2^n - [2p-1,2;o]n^{1|-1}2^n + [2p-2,3;o]n^{2|-1}2^n - \ldots .$$
$$\ldots + [o,2p+1;o]n^{2p|-1}2^n$$

aus den Elementen

$$n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots .,\ n-2n,$$

Wir können die Summe dieser Reihe vereinfachen, wenn wir die Reihe in folgende zwei zerlegen

$$n\{n^{2p-1}n_{,}^{\circ|-1}+(n-2)^{2p-1}n_{,}^{1|-1}+ \ldots +(n-2n)^{2p-1}n_{,}^{n|-1}\}$$

und

$$-2n\{(n-2)^{2p-1}(n-1)_{,}^{\circ|-1}+(n-4)^{2p-1}(n-1)_{,}^{1|-1}+..(n-2n)^{2p-1}(n-1)_{,}^{n-1|-1}\}$$

wovon die erste verschwindet, und die zweite nach der Gleichung 642 summirt werden kann, nämlich wenn $a = n-2$, $h = -2$, $z = 1$, $p = 2p-1$ gesetzt wird; wir finden, dafs

647) $$n^{2p}n_{,}^{\circ|-1}+(n-2)^{2p}n_{,}^{1|-1}+(n-4)^{2p}n_{,}^{2|-1}+ \ldots +(n-2n)^{2p}n_{,}^{n|-1} =$$
$$= -n.2^{n+1}\{[2p-1,1;o]-[2p-2,2;o]n^{1|-1}+[2p-3,3;o]n^{2|-1}- \ldots$$
$$\ldots -[o,2p;o]n^{2p-1|-1}\}$$

aus den Elementen $n-2$, $n-4$, $n-6$, $n-8$, . . . , $n-4p$

§. 186.

Der Werth von n ist keiner Bedingung unterworfen, und kann verneint seyn. Die Reihen werden dadurch unendlich und die Summen erhalten $-n$ statt $+n$. Unter diesen verneinten Werthen ist $n = -1$ besonders zu beachten. Setzen wir zuerst $-z$ statt z, so erhalten wir nach 623, 627, 631, drei verschiedene Summen für die unendliche Reihe

$$(o+a_1|p)z^o+(1+a_1|p)z^1+(2+a_1|p)z^2+(3+a_1|p)z^3+ \ldots$$

Soll die Summe einer endlichen Reihe gebildet werden, deren letztes Glied $(x+a_2|p)z^x$ ist, so wird die vorstehende Reihe mit z^{x+1} vervielfacht, in ihr a_1+x+1 statt a_1 gesetzt, und die Summe dieser Reihe von der Summe der vorstehenden unendlichen Reihe abgezählt. Nach diesem erhalten wir folgende Summen, wenn wir $1-z = V$ setzen, aus 623

$$(o+a_1|p)z^o+(1+a_1|p)z^1+(2+a_1|p)z^2+\ldots+(x+a_1|p)z^x =$$
$$-(a_1+x+1)(a_2+x+1)(a_3+x+1)(a_4+x+1)V^{-x} -$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 & a_2+x+1 & a_3+x+1 \\ a_1+x+1 & a_2+x+1 & a_4+x+2 \\ a_1+x+1 & a_3+x+2 & a_4+x+2 \\ a_2+x+2 & a_3+x+2 & a_4+x+2 \end{vmatrix} 1^{1|1}z^1V^{-2} \begin{vmatrix} a_1+x+1 & a_2+x+1 \\ a_1+x+1 & a_3+x+2 \\ a_1+x+1 & a_4+x+3 \\ a_2+x+2 & a_3+x+2 \\ a_2+x+2 & a_4+x+3 \\ a_3+x+3 & a_4+x+3 \end{vmatrix} 1^{2|1}z^2V^{-3} -$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x+1 \\ a_2+x+2 \\ a_3+x+3 \\ a_4+x+4 \end{vmatrix} 1^{3|1}z^3V^{-4} - 1^{4|1}z^4V^{-5} - \mathfrak{B}_{-1}$$

wo $\mathfrak{B}_{-1}$ den Werth der ganzen Summe bedeutet, der entsteht, wenn in ihr -1 statt x eingeführt wird.

Nach 627 ist die Summe dieser Reihe

$$649) = -(a_1+x)(a_2+x)(a_3+x)(a_4+x)V^{-x} - \begin{vmatrix} a_1+x-o & a_2+x-o & a_3+x-o \\ a_1+x-o & a_2+x-o & a_4+x-1 \\ a_1+x-o & a_3+x-1 & a_4+x-1 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 & a_4+x-1 \end{vmatrix} 1^{1|1}V^{-2}$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+x-o & a_2+x-o \\ a_1+x-o & a_3+x-1 \\ a_1+x-o & a_4+x-2 \\ a_2+x-1 & a_3+x-1 \\ a_2+x-1 & a_4+x-2 \\ a_3+x-2 & a_4+x-2 \end{vmatrix} 1^{2|1}V^{-3} - \begin{vmatrix} a_1+x-o \\ a_2+x-1 \\ a_3+x-2 \\ a_4+x-3 \end{vmatrix} 1^{3|1}V^{-4} - 1^{4|1}V^{-5} - \mathfrak{B}_{-1}$$

Eben so ergiebt sich die dritte Summe dieser Reihe aus 631.

Dicse Reihen sind sehr allgemein; sie umfassen unter vielen andern folgende, welche oft vorkommen

$$\Sigma(-)^x(x+a_1|p),\ \Sigma(x+a)^p,\ \Sigma z^x(xh+a)^{p\,k},$$
$$\Sigma(-)^x(x+a)^p,\ \Sigma(-)^x x^p = 1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \ldots - \ldots$$

IV. Abtheilung.

Summirung der Reihe

$$(o+a_r'p)n_{,}^{o|-r}b^{n|h}d^{o|h}+(1+a_1|p)n_{,}^{1|-r}b^{n-1|h}d^{1|h}+(2+a_1|p)n_{,}^{2|-r}b^{n-2|h}d^{2|h}+\ldots$$
$$\ldots+(n+a_1|p)n_{,}^{n|-r}b^{o|h}d^{n|h}$$

§. 187.

Diese Reihe ist allgemeiner als die vorhergehende in §. 177.; jene entsteht aus dieser, wenn h = o und b = 1 gesetzt wird. Dieselbe Methode, welche im Zerlegen der einzelnen Glieder besteht, führt auch bei dieser allgemeinen Reihe zum Ziele. Zuerst suchen wir alle mögliche Zerfällungen von x+a, welche sich mit den dreien Producten $n_{,}^{x|-r}$, $b^{n-x|h}$ und $d^{x|h}$ vereinigen lassen, durch die Gleichungen

$$x+a = A+Bx = C+D(n-x) = E+F(b+nh-xh) = G+H(d+xh) =$$
$$= Ix+K(n-x) = Lx+M(b+nh-xh) = Nx+O(d+xh) =$$
$$= P(n-x)+Q(b+nh-xh) = R(n-x)+S(d+xh) = T(b+nh-xh)+U(d+xh)$$

Wir finden durch Gleichsetzung der Vorzahlen von x folgende Zerfällungen

$$x+a = (a)+(x) = (a+n)-(n-x) = (ha+hn+b)h^{-r}-h^{-r}(b+nh-xh) =$$
$$= h^{-r}(ha-d)+h^{-r}(d+xh) = n^{-r}(a+n)x+n^{-r}a(n-x) =$$
$$= (b+nh)^{-r}(b+nh+ha).x+(b+nh)^{-r}a.(b+nh-xh) =$$
$$= d^{-r}(d-ah)x+d^{-r}a.(d+xh) =$$
$$= b^{-r}(a+n)(b+nh-xh)-b^{-r}(b+hn+ha).(n-x) =$$
$$= (d+hn)^{-r}(a+n).(d+xh)+(d+hn)^{-r}(ha-d).(n-x) =$$
$$= h^{-r}(b+d+nh)(ah-d)(b+nh-xh)+h^{-r}(b+d+nh)^{-r}(b+nh+ah)(d+xh)$$

Diese zehn Zerfällungen geben eben so viele Arten, die Summe der vorhergehenden Reihe zu bilden; da die sechste und neunte Zerfällung zu

sehr verwickelten Verbindungen führen, so mögen sie hier übergangen werden.

§. 188.

Die erste Zerfällung von $x+a$ giebt folgende zurücklaufende Bestimmung der Summe

650) $$\Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = a_1\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} + nd\Sigma(x-1+1+a_1|p-1)(n-1)^{x-1|-1}b^{n-1-x+1,h}(d+h)^{x-1|h}$$

und diese die unabhängige Bildungsweise

651) $$\Sigma(x+a_1|4)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = (a_1+o)(a_2+o)(a_3+o)(a_4+o)(b+d)^{n|h} +$$
$$+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & a_3+o \\ a_1+o & a_2+o & a_4+1 \\ a_1+o & a_3+1 & a_4+1 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_4+1 \end{vmatrix} n^{1|-1}d^{1|h}(b+d+h)^{n-1|h} + \begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o \\ a_1+o & a_3+1 \\ a_1+o & a_4+2 \\ a_2+1 & a_3+1 \\ a_2+1 & a_4+2 \\ a_3+2 & a_4+2 \end{vmatrix} n^{2|-1}d^{2|h}(b+d+2h)^{n-2|h} +$$
$$+\begin{vmatrix} a_1+o \\ a_2+1 \\ a_3+2 \\ a_4+3 \end{vmatrix} n^{3|-1}d^{3|h}(b+d+3h)^{n-3|h} + n^{4|-1}d^{4|h}(b+d+4h)^{n-4|h}$$

§. 189.

Aus der zweiten Zerlegung von $x+a$ entspringt folgende zurücklaufende Bestimmung

652) $$\Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x\,h} =$$
$$=(a_1+n)\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} - nb\Sigma(x+a_2|p-1)(n-1)^{x|-1}(b+h)^{n-1+x|h}d^{x|h}$$

und aus dieser die unabhängige

653) $$\Sigma(x+a_1|4)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} =$$

$$= (a_1+n-o)(a_2+n-o)(a_3+n-o)(a_4+n-o)(b+d)^{n|h}$$

$$-\begin{vmatrix} a_1+n-o & a_2+n-o & a_3+n-o \\ a_1+n-o & a_2+n-o & a_4+n-1 \\ a_1+n-o & a_3+n-1 & a_4+n-1 \\ a_2+n-1 & a_3+n-1 & a_4+n-1 \end{vmatrix} n^{1|-1}b^{1|h}(b+d+h)^{n-1|h} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+n-o & a_2+n-o \\ a_1+n-o & a_3+n-1 \\ a_1+n-o & a_4+n-2 \\ a_2+n-1 & a_3+n-1 \\ a_2+n-1 & a_4+n-2 \\ a_3+n-2 & a_4+n-2 \end{vmatrix} n^{2|-1}b^{2|h}(b+d+2h)^{n-2|h} -$$

$$-\begin{vmatrix} a_1+n-o \\ a_2+n-1 \\ a_3+n-2 \\ a_4+n-3 \end{vmatrix} n^{3|-1}b^{3|h}(b+d+3h)^{n-3|h}+n^{4|-1}b^{4|h}(b+d+4h)^{n-4|h}$$

§. 190.

Die dritte Zerlegung führt zu der zurücklaufenden Bestimmung

654) $$\Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} =$$

$$= (ha_1+hn+b)h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} -$$

$$- bh^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}(b+h)^{n-x|h}d^{x|h}$$

und zu der unabhängigen

655) $$\Sigma(x+a_1|4)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = (ha_1+hn+oh+b)(ha_2+hn+oh+b) \times$$

$$\times (ha_3+hn+oh+b)(ha_4+hn+oh+b)h^{-4}(b+d)^{n|h}$$

$$-\begin{vmatrix} ha_1+hn+oh+b & ha_2+hn+oh+b & ha_3+hn+oh+b \\ ha_1+hn+oh+b & ha_2+hn+oh+b & ha_4+hn+1h+b \\ ha_1+hn+oh+b & ha_3+hn+1h+b & ha_4+hn+1h+b \\ ha_2+hn+1h+b & ha_3+hn+1h+b & ha_4+hn+1h+b \end{vmatrix} b^{1|h}h^{-4}(b+d+h)^{n|h}+$$

$$+\begin{vmatrix} ha_1+hn+oh+b & ha_2+hn+oh+b \\ ha_1+hn+oh+b & ha_3+hn+1h+b \\ ha_1+hn+oh+b & ha_4+hn+2h+b \\ ha_2+hn+1h+b & ha_3+hn+1h+b \\ ha_2+hn+1h+b & ha_4+hn+2h+b \\ ha_3+hn+2h+b & ha_4+hn+2h+b \end{vmatrix} b^{2|h}h^{-4}(b+d+2h)^{n|h}$$

$$-\begin{vmatrix} ha_1+hn+oh+b \\ ha_2+hn+1h+b \\ ha_3+hn+2h+b \\ ha_4+hn+3h+b \end{vmatrix} b^{3|h}h^{-4}(b+d+3h)^{n|h}+b^{4|h}h^{-4}(b+d+4h)^{n|h}$$

§. 191.

Die vierte zurücklaufende Bildungsweise ergiebt sich aus der vierten Zerlegung

656) $$\Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = (ha_1-d)h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} + dh^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}b^{n-x|h}(d+h)^{x|h}$$

woraus folgende unabhängige folgt

657) $$\Sigma(x+a_1|4)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} =$$

$$= (ha_1-oh-d)(ha_2-oh-d)(ha_3-oh-d)(ha_4-oh-d\,h^{-4}(b+d)^{n|h}$$

$$+\begin{vmatrix} ha_1-oh-d & ha_2-oh-d & ha_3-oh-d \\ ha_1-oh-d & ha_2-oh-d & ha_4-1h-d \\ ha_1-oh-d & ha_3-1h-d & ha_4-1h-d \\ ha_2-1h-d & ha_3-1h-d & ha_4-1h-d \end{vmatrix} d^{1|h}h^{-4}(b+d+h)^{n|h}+$$

$$+\begin{vmatrix} ha_1-oh-d & ha_2-oh-d \\ ha_1-oh-d & ha_3-1h-d \\ ha_1-oh-d & ha_4-2h-d \\ ha_2-1h-d & ha_3-1h-d \\ ha_2-1h-d & ha_4-2h-d \\ ha_3-2h-d & ha_4-2h-d \end{vmatrix} d^{2|h}h^{-4}(b+d+2h)^{n|h}$$

$$+\begin{vmatrix} ha_1-oh-d \\ ha_2-1h-d \\ ha_3-2h-d \\ ha_4-3h-d \end{vmatrix} d^{3|h}h^{-4}(b+d+3h)^{n|h}+d^{4|h}h^{-4}(b+d+4h)^{n|h}$$

§. 192.

Diese vier unabhängigen Bildungsweisen sind in Vergleich der vier folgenden einfach zu nennen; wir erhalten aus der fünften Zerlegung zuerst die zurücklaufende Bestimmung

$$658)\ \Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = a_1b\Sigma(x+a_2|p-1)(n-1)^{x|-1}(b+h)^{n-1+x|h}d^{x|h} + \\ +(a_1+n)d\Sigma(x-1+1+a_2|p-1)(n-1)^{x-1|-1}b^{n-1-x+1|h}(d+h)^{x-1|h}$$

und aus dieser die unabhängige

$$659)\quad \Sigma(x+a_1|4)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = \{(a_1+o)(a_2+o)(a_3+o)(a_4+o)b^{4|h}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & a_3+o & a_4+n-3 \\ a_1+o & a_2+o & a_4+1 & a_3+n-2 \\ a_1+o & a_3+1 & a_4+1 & a_2+n-1 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_4+1 & a_1+n-o \end{vmatrix} b^{3|h}d^{1|h}+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & a_3+n-2 & a_4+n-2 \\ a_1+o & a_3+1 & a_2+n-1 & a_4+n-2 \\ a_1+o & a_4+2 & a_2+n-1 & a_3+n-1 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_1+n-o & a_4+n-2 \\ a_2+1 & a_4+2 & a_1+n-o & a_3+n-1 \\ a_3+2 & a_4+2 & a_1+n-o & a_2+n-o \end{vmatrix} b^{2|h}d^{2|h}$$

$$+\left|\begin{matrix} a_1+o & a_2+n-1 & a_3+n-1 & a_4+n-1 \\ a_2+1 & a_1+n-o & a_3+n-1 & a_4+n-1 \\ a_3+2 & a_1+n-o & a_2+n-o & a_4+n-1 \\ a_4+3 & a_1+n-o & a_2+n-o & a_3+n-o \end{matrix}\right| b^{1|h} d^{5|h} +$$

$$+ (a_1+n-o)(a_2+n-o)(a_3+n-o)(a_4+n-o)d^{4|h}\}(b+d+4h)^{n-4|h}$$

§. 193.

Es ist schon vorhin erwähnt, dafs die sechste Zerlegung übergangen werden soll. Die siebente Zerlegung giebt folgende zurücklaufende und unabhängige Bildungsweise

660) $$\Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = a_1\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}b^{n-x|h}(d+h)^{x|h} +$$
$$+ (d-ha_1)n\Sigma(x-1+1+a_2|p-1)(n-1)^{x-1|-1}b^{n-1-x+1|h}(d+h)^{x-1|h}$$

und

661) $$\Sigma(x+a_1|4)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = (a_1+o)(a_2+o)(a_3+o)(a_4+o)(b+d+4h)^{n|h} +$$
$$+\left|\begin{matrix} a_1+o & a_2+o & a_3+o & d+3h-ha_4 \\ a_1+o & a_2+o & a_4+1 & d+2h-ha_3 \\ a_1+o & a_3+1 & a_4+1 & d+1h-ha_2 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_4+1 & d+oh-ha_1 \end{matrix}\right| n^{1|-1}(b+d+4h)^{n-1|h}$$
$$+\left|\begin{matrix} a_1+o & a_2+o & d+2h-ha_3 & d+2h-ha_4 \\ a_1+o & a_3+1 & d+1h-ha_2 & d+2h-ha_4 \\ a_1+o & a_4+2 & d+1h-ha_2 & d+1h-ha_3 \\ a_2+1 & a_3+1 & d+oh-ha_1 & d+2h-ha_4 \\ a_2+1 & a_4+2 & d+oh-ha_1 & d+1h-ha_3 \\ a_3+2 & a_4+2 & d+oh-ha_1 & d+oh-ha_2 \end{matrix}\right| n^{2|-1}(b+d+4h)^{n-2|h}$$
$$+\left|\begin{matrix} a_1+o & d+1h-ha_2 & d+1h-ha_3 & d+1h-ha_4 \\ a_2+1 & d+oh-ha_1 & d+1h-ha_3 & d+1h-ha_4 \\ a_3+2 & d+oh-ha_1 & d+oh-ha_2 & d+1h-ha_4 \\ a_4+3 & d+oh-ha_1 & d+oh-ha_2 & d+oh-ha_3 \end{matrix}\right| n^{3|-1}(b+d+4h)^{n-3|h}$$

$$+(d+oh-ha_1)(d+oh-ha_2)(d+oh-ha_3)(d+oh-ha_4)n^{4|-1}(b+d+4h)^{n-4|h}$$

§. 194.

Aus der achten Zerfällung ergeben sich folgende Bildungsweisen

662) $$\Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = (a_1+n)\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}(b+h)^{n-x|h}d^{x|h} - (ha_1+hn+b)n\Sigma(x+a_2|p-1)(n-1)^{x|-1}(b+h)^{n-1+x|h}d^{x|h}$$

und

663)
$$\Sigma(x+a_1|4)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} = (a_1+n-o)(a_2+n-o)(a_3+n-o)(a_4+n-o)(b+d+4h)^{n|h}$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+n-o & a_2+n-o & a_3+n-o & ha_4+hn+3h+b \end{vmatrix} n^{1|-1}(b+d+4h)^{n-1|h}$$
$$\begin{vmatrix} a_1+n-o & a_2+n-o & a_4+n-1 & ha_3+hn+2h+b \\ a_1+n-o & a_3+n-1 & a_4+n-1 & ha_2+hn+1h+b \\ a_2+n-1 & a_3+n-1 & a_4+n-1 & ha_1+hn+oh+b \end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} a_1+n-o & a_2+n-o & ha_3+hn+2h+b & ha_4+hn+2h+b \\ a_1+n-o & a_3+n-1 & ha_2+hn+1h+b & ha_4+hn+2h+b \\ a_1+n-o & a_4+n-2 & ha_2+hn+1h+b & ha_3+hn+1h+b \\ a_2+n-1 & a_3+n-1 & ha_1+hn+oh+b & ha_4+hn+2h+b \\ a_2+n-1 & a_4+n-2 & ha_1+hn+oh+b & ha_3+hn+1h+b \\ a_3+n-2 & a_4+n-2 & ha_1+hn+oh+b & ha_2+hn+oh+b \end{vmatrix} n^{2|-1}(b+d+4h)^{n-2|h}$$
$$-\begin{vmatrix} a_1+n-o & ha_2+nh+1h+b & ha_3+nh+1h+b & ha_4+nh+1h+b \\ a_2+n-1 & ha_1+nh+oh+b & ha_3+nh+1h+b & ha_4+nh+1h+b \\ a_3+n-2 & ha_1+nh+oh+b & ha_2+nh+oh+b & ha_4+nh+1h+b \\ a_4+n-3 & ha_1+nh+oh+b & ha_2+nh+oh+b & ha_3+nh+oh+b \end{vmatrix} n^{3|-1}(b+d+4h)^{n-3|h}$$
$$+(ha_1+nh+oh+b)(ha_2+nh+oh+b)(ha_3+nh+oh+b)(ha_4+nh+oh+b)n^{4|-1}\times(b+d+4h)^{n-4|h}$$

§. 195.

Die letzte Zerfällung giebt folgende zurücklaufende und unabhängige Bestimmungen

$$664)\quad \Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} =$$
$$= (ha_1-d)bh^{-1}(b+d+nh)^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}(b+h)^{n-x|h}d^{x|h}$$
$$+ (ha_1+hn+b)dh^{-1}(b+d+nh)^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)n^{x|-1}b^{n-x|h}(d+h)^{x|h}.$$

und

$$665)\quad \Sigma(x+a_1|p)n^{x|-1}b^{n-x|h}d^{x|h} =$$
$$= \{(ha_1-oh-d)(ha_2-oh-d)(ha_3-oh-d)(ha_4-oh-d)b^{4|h}$$
$$+\left|\begin{matrix} ha_1-oh-d & ha_2-oh-d & ha_3-oh-d & ha_4+nh+3h+b \end{matrix}\right| b^{3|h}d^{1|h}$$
$$+\left|\begin{matrix} ha_1-oh-d & ha_2-oh-d & ha_4-1h-d & ha_3+nh+2h+b \\ ha_1-oh-d & ha_3-1h-d & ha_4-1h-d & ha_2+nh+1h+b \\ ha_2-1h-d & ha_3-1h-d & ha_4-1h-d & ha_1+nh+oh+b \end{matrix}\right|$$
$$+\left|\begin{matrix} ha_1-oh-d & ha_2-oh-d & ha_3+nh+2h+b & ha_4+nh+2h+b \\ ha_1-oh-d & ha_3-1h-d & ha_2+nh+1h+b & ha_4+nh+2h+b \\ ha_1-oh-d & ha_4-2h-d & ha_2+nh+1h+b & ha_3+nh+1h+b \\ ha_2-1h-d & ha_3-1h-d & ha_1+nh+oh+b & ha_4+nh+2h+b \\ ha_2-1h-d & ha_4-2h-d & ha_1+nh+oh+b & ha_3+nh+1h+b \\ ha_3-2h-d & ha_4-2h-d & ha_1+nh+oh+b & ha_2+nh+oh+b \end{matrix}\right| b^{2|h}d^{2|h}$$
$$+\left|\begin{matrix} ha_1-oh-d & ha_2+nh+1h+b & ha_3+nh+1h+b & ha_4+nh+1h+b \\ ha_2-1h-d & ha_1+nh+oh+b & ha_3+nh+1h+b & ha_4+nh+1h+b \\ ha_3-2h-d & ha_1+nh+oh+b & ha_2+nh+oh+b & ha_4+nh+1h+b \\ ha_4-3h-d & ha_1+nh+oh+b & ha_2+nh+oh+b & ha_3+nh+oh+b \end{matrix}\right| b^{1|h}d^{3|h}$$
$$+(ha_1+nh+oh+b)(ha_2+nh+oh+b)(ha_3+nh+oh+b)(ha_4+nh+oh+b)d^{4|h}\}h^{-4} \times$$
$$\times (b+d+4h)^{n-4|h}$$

§. 196.

Von diesen ganz allgemeinen Reihen gehen wir zu einigen besondern Fällen über. Ist $a_1 = a+p-1$, $a_2 = a+p-2$, $a_3 = a+p-3$, ... , $a_p = a$, so wird aus 651

666) $a^{p|1}n_{,}^{o|-1}b^{n|h}d^{o|h}+(a+1)^{p|1}n_{,}^{1|-1}b^{n-1|h}d^{1|h}+(a+2)^{p|1}n_{,}^{2|-1}b^{n-2|h}d^{2|h}+\ldots$
$\ldots+(a+n)^{p|1}n_{,}^{n|-1}b^{o|h}d^{n|h} = a^{p|1}(b+d)^{n|h}+(a+1)^{p-1|1}n^{1|-1}d^{1|h}(b+d+h)^{n-1|h}$
$+(a+2)^{p-2|1}n^{2|-1}d^{2|h}(b+d+2h)^{n-3|1}n^{3|-1}d^{3|h}(b+d+3h)^{n-4|h}+\ldots$
$+(a+p)^{o|1}n^{p|-1}d^{p|h}(b+d+ph)^{n-p|n}$

aus 655

667) $= \{h(a+n)+b\}^{p|h}h^{-p}(b+d)^{n|h}-\{h(a+n+1)+b\}^{p-1|h}h^{-p}b^{1|h}(b+d+h)^{n|h}+$
$+\{h(a+n+2)+b\}^{p-2|h}h^{-p}b^{2|h}(b+d+2h)^{n|h}-\ldots$
$\ldots(-)^{p}\{h(a+n+p)+b\}^{o|h}h^{-p}b^{p|h}(b+d+ph)^{n|h}$

und ist $a_1 = a$, $a_2 = a+1$, $a_3 = a+2$, . . . , $a_p = a+p-1$, so ist die Summe derselben Reihe aus 653

668) $= (a+n)^{p|1}(b+d)^{n|h}-(a+n)^{p-1|1}n^{1|-1}b^{1|h}(b+d+h)^{n-1|h}+$
$+(a+n)^{p-2|1}n^{2|-1}b^{2|h}(b+d+2h)^{n-2|h}-\ldots$
$\ldots(-)^{p}(a+n)^{o|1}n^{p|-1}b^{p|h}(b+d+ph)^{n-p|h}$

und aus 657

669) $= (ha-d)^{p|h}h^{-p}(b+d)^{n|h}+(ha-d)^{p-1|h}h^{-p}d^{1|h}(b+d+h)^{n|h}$
$+(ha-d)^{p-2|h}d^{2|h}h^{-p}(b+d+2h)^{n|h}+\ldots+(ha-d)^{o|h}d^{p|h}h^{-p}(b+d+ph)^{n|h}$

Ist $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_p$, so erhalten wir die Summe folgender Reihe aus 651

670) $a^{p}n_{,}^{o|-1}b^{n|h}d^{o|h}+(a+1)^{p}n_{,}^{1|-1}b^{n-1|h}d^{1|h}+(a+2)^{p}n_{,}^{2|-1}b^{n-2|h}d^{2|h}+\ldots$
$\ldots+(a+n)^{p}n_{,}^{n|-1}b^{c|h}d^{n|h} = [p,1;o](b+d)^{n|h}+[p-1,2;o]n^{1|-1}d^{1|h}(b+d+h)^{n-1|h}$
$+[p-2,3;o]n^{2|-1}d^{2|h}(+bd+2h)^{n-2|h}+\ldots+[o,p+1;o]n^{p|-1}d^{p|h}(b+d+ph)^{n-p|h}$

aus den Elementen a, a+1, a+2, a+3, . . . , a+p

aus 653

671) $$= [p,1;o](b+d)^{n|h} - [p-1,2;o]n^{1|-1}b^{1|h}(b+d+h)^{n-1|h} +$$
$$+ [p-2,3;o]n^{2|-1}b^{2|h}(b+d+2h)^{n-2|h} - \ldots$$
$$\ldots (-)^p[o,p+1;o]n^{p|-1}b^{p|h}(b+d+ph)^{n-p|h}$$

aus den Elementen $a+n$, $a+n-1$, $a+n-2$, $\ldots$, $a+n-p$

aus 655

672) $$= [p,1;o]h^{-p}(b+d)^{n|h} - [p-1,2;o]h^{-p}b^{1|h}(b+d+h)^{n|h} +$$
$$+ [p-2,3;o]h^{-p}b^{2|h}(b+d+2h)^{n|h} - \ldots (-)^p[o,p+1;o]h^{-p}b^{p|h}(b+d+ph)^{n|h}$$

aus den Elementen $b+(a+n)h$, $b+(a+n+1)h$, $b+(a+n+2)h$, $\ldots$, $b+(a+n+p)h$

aus 657

673) $$= [p,1;o]h^{-p}(b+d)^{n|h} + [p-1,2;o]h^{-p}d^{1|h}(b+d+h)^{n|h} +$$
$$+ [p-2,3;o]h^{-p}d^{2|h}(b+d+2h)^{n|h} + \ldots + [o,p+1;o]h^{-p}d^{p|h}(b+d+ph)^{n|h}$$

aus den Elementen $ha-d$, $h(a-1)-d$, $h(a-2)-d$, $h(a-3)-d$, $\ldots$, $h(a-p)-d$.

Da die Reihe, welche hier zum Grunde liegt, sowohl für das bejahete als verneinte n gilt, so haben auch diese Reihen dieselbe Ausdehnung.

§. 197.

Ist $b+d+nh-h = o$, so verschwindet nach 653 die ganze Summe, so lange n bejahet und grösser ist als p; die Reihe geht dadurch in jene über, welche schon 632 untersucht ist.

Ist aber $b+d+nh = o$, so verschwinden in der Summe 655 alle Producte ausser dem ersten, so lange p nicht grösser als n ist, und es ist

674) $$\frac{(o+a_1|n-q)n^{o|-1}}{d} - \frac{(1+a_1|n-q)n^{1|-1}}{d+h} + \frac{(2+a_1|n-q)n^{2|-1}}{d+2h} - \ldots$$
$$\ldots (-)^n \cdot \frac{(n+a_1|n-q)n^{n|-1}}{d+nh} = (-)^{n-q}(d-ha_1|n-q)\frac{h^q 1^{n|1}}{d^{n+1|h}}$$

wo $q = 0, 1, 2, 3, \ldots n$ seyn kann.

Setzen wir $h = 1$, $d = n+1$, $q = 0$, $a_1 = a_2 \ldots = 0$, so erhalten wir aus 674 die Summe der Reihe

$$675) \quad \frac{1^n.n^{\underline{1}|-1}}{n+2} - \frac{2^n.n^{\underline{2}|-1}}{n+3} + \frac{3^n.n^{\underline{3}|-1}}{n+4} - \ldots (-)^n \cdot \frac{n^n.n^{\underline{n}|-1}}{2n+1} =$$

$$= (-)^{n-1} \cdot \frac{(n+1)^n 1^{n|1}}{(n+1)^{n+1|1}}$$

Ist $b+d+nh+h = 0$, so ist aus 657

$$676) \quad \frac{(0+a_1|p)n^{\underline{0}|-1}}{d(d+h)} - \frac{(1+a_1|p)n^{\underline{1}|-1}}{(d+h)(d+2h)} + \frac{(2+a_1|p)n^{\underline{2}|-1}}{(d+2h)(d+3h)} - \ldots (-)^n \frac{(n+a_1|p)n^{\underline{n}|-1}}{(d+nh)(d+nh+h)}$$

$$= \frac{1^{n|1}h^{n-p}\{([p,p,1])(n+1)+([p-1,p,2])d\}}{d^{n+2|h}}$$

so lange, als p kleiner, als n+2 ist, und wo

$$([3,4,2]) = \begin{vmatrix} ha_1-oh-d|ha_2-oh-d|ha_3-oh-d| \\ ha_1-oh-d|ha_2-oh-d|ha_4-1h-d| \\ ha_1-oh-d|ha_3-1h-d|ha_4-1h-d| \\ ha_2-1h-d|ha_3-1h-d|ha_4-1h-d| \end{vmatrix}$$

ist. Ist $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a$, so ist

$$677) \quad \frac{a^p n^{\underline{0}|-1}}{d(d+h)} - \frac{(1+a)^p n^{\underline{1}|-1}}{(d+h)(d+2h)} + \frac{(2+a)^p n^{\underline{2}|-1}}{(d+2h)(d+3h)} - \ldots (-)^n \cdot \frac{(n+a)^p n^{\underline{n}|-1}}{(d+nh)(d+nh+h)} =$$

$$= 1^{n|1}h^{n-p-1}\left\{\frac{(ha-p)^p}{d^{n+1|h}} - \frac{(ha-h-d)^p}{(d+h)^{n+1|h}}\right\}$$

V. Abtheilung.

Allgemeines Verfahren bei dieser Summirungsweise.

§. 198.

Ist die Summe der Reihe

$$f(o).(b+o)^{m|h}+f(1).(b+1)^{m|h}+f(2).(b+2)^{m|h}+\ldots+f(x).(b+x)^{m|h} = F(x,m)$$

bekannt, so kann aus ihr die Summe der Reihe

$$(o+a_1|p).f(o).(b+o)^{m|h}+(1+a_1|p).f(1).(b+1)^{m|h}+(2+a_1|p).f(2).(b+2)^{m|h}+\ldots$$

hergeleitet werden. Es wird nämlich von dem Producte $(x+a_1|p)$ der erste Factor $x+a_1$ getrennt, und in zwei Theile $(a_1-b-mh)+(b+x+mh)$ zerfällt, wovon der zweite Theil sich zu dem zweiten Producte $(b+x)^{m|h}$ gesellt. Hierdurch wird die Gleichung hervorgebracht

$$678)\quad \Sigma(x+a_1|p)f(x).(b+x)^{m|h} = (a_1-b-mh)\Sigma(x+a_2|p-1)f(x).(b+x)^{m|h} + \Sigma(x+a_2|p-1)f(x).(b+x)^{m+1|h}$$

welche die zurücklaufende Bildungsweise der Summen der obigen Reihe enthält; wir erhalten nach ihr die Summe der Reihe

$$679)\quad (o+a_1|4)f(o).(b+o)^{m|h}+(1+a_1|4)f(1)(b+1)^{m|h}+(2+a_1|4)f(2)(b+2)^{m|h}+\ldots + (x+a_1|4)f(x)(b+x)^{m|h}$$

$$= (a_1-b-mh)(a_2-b-mh)(a_3-b-mh)(a_4-b-mh)F(x,m)$$

$$+\begin{vmatrix} a_1-b-mh-oh & a_2-b-mh-oh & a_3-b-mh-oh \\ a_1-b-mh-oh & a_2-b-mh-oh & a_4-b-mh-1h \\ a_1-b-mh-oh & a_3-b-mh-1h & a_4-b-mh-1h \\ a_2-b-mh-1h & a_3-b-mh-1h & a_4-b-mh-1h \end{vmatrix} F(x,m+1)$$

$$+\begin{vmatrix} a_1-b-mh-oh & a_2-b-mh-oh \\ a_1-b-mh-oh & a_3-b-mh-1h \\ a_1-b-mh-oh & a_4-b-mh-2h \\ a_2-b-mh-1h & a_3-b-mh-1h \\ a_2-b-mh-1h & a_4-b-mh-2h \\ a_3-b-mh-2h & a_4-b-mh-2h \end{vmatrix} F(x,m+2)+\begin{vmatrix} a_1-b-mh-oh & F(x,m+3) \\ a_2-b-mh-1h & \\ a_3-b-mh-2h & \\ a_4-b-mh-3h & \end{vmatrix}$$

$$+F(x,m+4)$$

Dasselbe Verfahren findet statt, wenn m verneint ist.

§. 199.

Es sey die Summe der Reihe

$$f(o).d^{o|h}+f(1).d^{1|h}+f(2).d^{2|h}+\ldots+f(x).d^{x|h}=\mathfrak{S}(x,d)$$

bekannt; aus ihr soll die Summe der Reihe

$$(o+a_1|p)f(o)d^{o|h}+(1+a_1|p)f(1)d^{1|h}+\ldots+(x+a_1|p)f(x)d^{x|h}$$

abgeleitet werden.

Der Factor $x+a_1$, welcher vom Producte $(x+a_1|p)$ getrennt wird, wird in die beiden Theile

$$\frac{ha_1-d}{h}+\frac{d+xh}{h}$$

zerlegt, wovon der zweite Theil sich mit dem Producte $d^{x|h}$ vereinigen läfst; hierdurch entsteht die Gleichung

680) $$\Sigma(x+a_1|p)f(x).d^{x|h}=(ha_1-d)h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)f(x)d^{x|h}+$$
$$+d.h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)f(x)(d+h)^{x|h}$$

für die zurücklaufende Bildungsweise der Summe der vorgegebenen Reihe. Sie führt zu folgender Summe

681) $$\Sigma(x\,a_1|4)f(x)d^{x|h}=(ha_1-d)(ha_2-d)(ha_3-d)(ha_4-d)h^{-4}\mathfrak{S}(x,d)$$

$$+\left|ha_1-d-oh\right|ha_2-d-oh\left|ha_3-d-oh\right|d^{1|h}h^{-4}\mathfrak{G}(x,d+h)$$
$$+\left|\begin{array}{l} ha_1-d-oh\,|\,ha_2-d-oh\,|\,ha_3-d-1h \\ ha_1-d-oh\,|\,ha_2-d-oh\,|\,ha_4-d-1h \\ ha_1-d-oh\,|\,ha_3-d-1h\,|\,ha_4-d-1h \\ ha_2-d-1h\,|\,ha_3-d-1h\,|\,ha_4-d-1h \end{array}\right| d^{2|h}h^{-4}\mathfrak{G}(x,d+2h)+\left|\begin{array}{l} ha_1-d-oh \\ ha_2-d-1h \\ ha_3-d-2h \\ ha_4-d-3h \end{array}\right| d^{3|h}h^{-4}\mathfrak{G}(x,d+3h)$$
$$+\left|\begin{array}{l} ha_1-d-oh\,|\,ha_2-d-oh\,|\,ha_3-d-1h \\ ha_1-d-oh\,|\,ha_2-d-oh\,|\,ha_4-d-2h \\ ha_1-d-oh\,|\,ha_3-d-1h\,|\,ha_4-d-2h \\ ha_2-d-1h\,|\,ha_3-d-1h\,|\,ha_4-d-2h \\ ha_2-d-1h\,|\,ha_4-d-2h\,|\,ha_4-d-2h \\ ha_3-d-2h\,|\,ha_4-d-2h\,|\,ha_4-d-2h \end{array}\right| +d^{4|h}h^{-4}\mathfrak{G}(x,d+4h)$$

Wenn x verneint ist, so findet das gleiche Verfahren statt; ist nämlich

$$\frac{f(0)}{d^{0|h}}+\frac{f(1)}{d^{1|h}}+\cdots+\frac{f(x)}{d^{x|h}}=\mathfrak{H}(x,d)$$

so ist die Gleichung für die zurückkehrende Bildungsweise folgende

$$682)\quad \Sigma(x+a_1|p)\frac{f(x)}{d^{x|h}}=(ha_1+h-d)h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)\frac{f(x)}{d^{x|h}}$$
$$+(d-h)h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)\frac{f(x)}{(d-h)^{x|h}}$$

Von dieser Gleichung ist dann Anwendung zu machen, wenn d—h oder d—2h, d—3h . . . nicht verschwindet. Verschwindet aber d—h, so mufs folgender Weg eingeschlagen werden.

Es sey die Summe der Reihe

$$\frac{f(m+o)}{d^{o|h}}u^o+\frac{f(m+1)}{d^{1|h}}u^1+\frac{f(m+2)}{d^{2|h}}u^2+\cdots+\frac{f(m+x)}{d^{x|h}}u^x=\mathfrak{J}(x,m)$$

bekannt. Wird das allgemeine Glied dieser Reihe mit dem Factor $x+a_1$ verbunden, so werde in dem zweiten Theile m um 1 erhöhet, und x um 1 erniedriget; die zurücklaufende Bildungsweise giebt dann folgende Gleichung an

683) $$\Sigma(x+a_1|p)\frac{f(m+x).u^x}{d^{x,h}} = (h\,a_1+h-d)h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)\frac{f(m+x).u^x}{d^{x|h}}$$
$$+u.h^{-1}\Sigma(x-1+1+a_2|p-1)\frac{f(m+1+x-1)u^{x-1}}{d^{x-1|h}}$$

§. 200.

Kommt $d^{n-x|h}$ in dem allgemeinen Gliede vor als

$$f(m+o)d^{n|h}+f(m+1)d^{n-1|h}+\ldots+f(m+x)d^{n-x|h}$$

so kann, wenn $d^{n-x|h} = d^{n|h}(d+nh)^{-x|h}$ gesetzt wird, dieser Fall entweder auf 682 oder auf 683 zurückgebracht werden. Wird er ohne Rücksicht auf das Vorhergehende an und für sich behandelt, so ist die Gleichung, nach welcher die Summen der späteren Reihen aus den Summen der vorhergehenden Reihen abgeleitet werden, folgende:

684) $$\Sigma(x+a_1|p)f(m+x)d^{n-x|h} = (d+ha_1+hn)h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)f(m+x)d^{n-x|h}$$
$$-d.h^{-1}\Sigma(x+a_2|p-1)f(m+x)(d+h)^{n-x|h}$$

Wenn in dem allgemeinen Gliede zugleich zwei verschiedene Producte vereint

$$b^{x|h}\,.\,d^{x|h},\quad (b+x)^{m|h}\,.\,d^{x|k},\quad \frac{(b+x)^{m|h}}{v^{x|k}},\quad \frac{b^{x|h}}{d^{x|k}}$$

vorkommen, so kann entweder eins von den Producten in $f(x)$ begriffen angenommen, oder der Factor $x+a_1$ kann in solche zwei Theile zerfällt werden, dafs sich der erste Theil zum ersten Product und der zweite Theil zum zweiten Producte gesellet. Im letzteren Fall entstehen vierfache geordnete Verbindungen, so wie sie oft bei den früheren Reihen §. 159, 171, 192 sich ergeben haben.

§. 201.

Nachdem das Allgemeine dieser Summirungsweise auseinandergesetzt ist, so möge hier noch eine, obgleich kurze Anwendung auf die früheren Reihen Platz finden. Es ist nach 53 und 69

$$b^z = 1 + \frac{(z\lg:b)^1}{1} + \frac{(z\lg:b)^2}{1.2} + \frac{(z\lg:b)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Verbinden wir mit den Gliedern dieser Reihe nach ihrer Folge die Producte $(o+a_1|p)$, $(1+a_1|p)$, ... , so erhalten wir nach dem Obigen

685) $$\frac{(o+a_1|4)(z\lg:b)^o}{1^{o|1}} + \frac{(1+a_1|4)(z\lg:b)^1}{1^{1|1}} + \frac{(2+a_1|4)(z\lg:b)^2}{1^{2|1}} + \ldots.$$

$$\frac{(x+a_1|4)(z\lg:b)^x}{1^{x|1}} + \ldots. = \{(a_1+o)(a_2+o)(a_3+o)(a_4+o)(z\lg:b)^o +$$

$$+\begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o & a_3+o \\ a_1+o & a_2+o & a_4+1 \\ a_1+o & a_3+1 & a_4+1 \\ a_2+1 & a_3+1 & a_4+1 \end{vmatrix}(z\lg:b)^1 + \begin{vmatrix} a_1+o & a_2+o \\ a_1+o & a_3+1 \\ a_1+o & a_4+2 \\ a_2+1 & a_3+1 \\ a_2+1 & a_4+2 \\ a_3+2 & a_4+2 \end{vmatrix}(z\lg:b)^2 + \begin{vmatrix} a_1+o \\ a_2+1 \\ a_3+2 \\ a_4+3 \end{vmatrix}(z\lg:b)^3 + (z\lg:b)^4\}b^z$$

Ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a$, so ist

686) $$\frac{a^p.(z\lg:b)^o}{1^{o|1}} + \frac{(a+1)^p(z\lg:b)^1}{1^{1|1}} + \frac{(a+2)^p(z\lg:b)^2}{1^{2|1}} + \ldots. =$$

$$= \{[p,1;o](z\lg:b)^o + [p-1,2;o](z\lg:b)^1 + [p-2,3;o](z\lg:b)^2 + \ldots.$$
$$\ldots + [o,p+1;o](z\lg:b)^p\}.b^z$$

aus den Elementen a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, ...

Ist $a_p = \frac{a}{h}$, $a_{p-1} = \frac{a+h}{h}$, $a_{p-2} = \frac{a+2h}{h}$, . . . $a_1 = \frac{a+ph-h}{h}$,

so ist

687) $$\frac{a^{p|h}(z\lg:b)^0}{1^{0|1}} + \frac{(a+h)^{p|h}(z\lg:b)^1}{1^{1|1}} + \frac{(a+2h)^{p|h}(z\lg:b)^2}{1^{2|1}} + \ldots =$$

$$= \{a^{p|h}(z\lg:b)^0 + p^{1|-1}(a+h)^{0-1|h}h^1(z\lg:b)^1 + p^{2|-1}(a+2h)^{p-2|h}h^2(z\lg:b)^2$$
$$+ \ldots + p^{p|-1}(a+ph)^{0|h}h^p(z\lg:b)^p\}b^z$$

§. 202.

Es ist nach 298

$$b^n = b^{n|h} - (1,n-1;0)h^1b^{n-1|h} + (2,n-2;0)h^2b^{n-2|h} - \ldots$$
$$\ldots (-)^{n-1}(n-1,1;0)h^{n-1}b^{1|h}$$

aus den Elementen 1, 2, 3, 4, ...

und folglich nach 684.

688) $$(0+a_1|4)b^{n|h} - (1+a_1|4)(1,n-1;0)h^1b^{n-1|h} + (2+a_1|4)(2,n-2;0)h^2b^{n-2|h}$$
$$- \ldots (-)^{n-1}(n-1+a_1|4)(n-1,1;0)h^{n-1}b^{1|h} =$$
$$= (b+ha_1+hn)(b+ha_2+hn)(b+ha_3+hn)(b+ha_4+hn)h^{-4}b^n$$
$$- \begin{vmatrix} b+ha_1+hn+0h & b+ha_2+hn+0h & b+ha_3+hn+0h \\ b+ha_1+hn+0h & b+ha_2+hn+0h & b+ha_4+hn+1h \\ b+ha_1+hn+0h & b+ha_3+hn+1h & b+ha_4+hn+1h \\ b+ha_2+hn+1h & b+ha_3+hn+1h & b+ha_4+hn+1h \end{vmatrix} h^{-4}b^{1|h}(b+h)^n$$
$$+ \begin{vmatrix} b+ha_1+hn+0h & b+ha_2+hn+0h \\ b+ha_1+hn+0h & b+ha_3+hn+1h \\ b+ha_1+hn+0h & b+ha_4+hn+2h \\ b+ha_2+hn+1h & b+ha_3+hn+1h \\ b+ha_2+hn+1h & b+ha_4+hn+2h \\ b+ha_3+hn+2h & b+ha_4+hn+2h \end{vmatrix} h^{-4}b^{2|h}(b+2h)^n$$
$$- \begin{vmatrix} b+ha_1+hn+0h \\ b+ha_2+hn+1h \\ b+ha_3+hn+2h \\ b+ha_4+hn+3h \end{vmatrix} h^{-4}b^{3|h}(b+3h)^n + h^{-4}b^{4|h}(b+4h)^n$$

Eben so wird die Summe der Reihe

$$(o+a_1|p)b^{-n|h}-(1+a_1|p\,[1,n;o]h^1b^{-n-1|h}+(2+a_1|p)[2,n+1;o]h^2b^{-n-2|h}-\ldots$$
$$\ldots(-)^x(x+a_1|p)[x,n+x-1;o]h\,b^{-n-1}+\ldots.$$

aus den Elementen 1, 2, 3, 4, ... , gefunden.

§. 203.

In den früheren Abhandlungen und unter andern in der dritten und vierten, kommen mehrere Reihen vor, auf welche diese Summirungsweise angewendet werden kann; vorzüglich wichtig ist hierbei die Reihe in §. 181. Um ein Beispiel dieser Anwendung zu geben, wählen wir die Gleichungen 213 und 645. Nach 645, wenn $a = \frac{-n}{2}$ und $q = 2m$ gesetzt wird, ist

$$n^{n+2m}n_{,}^{o|-1}-(n-2)^{n+2m}n_{,}^{1|-1}+(n-4)^{n+2m}n_{,}^{2|-1}-\ldots.$$
$$\ldots(-)^n(n-2n)^{n+2m}n_{,}^{n-1}=2^n.1^{n|n}.[2m,n+1;o] \quad (\alpha$$
$$\{n,n-2,n-4,\ldots,-(n-2),-n\}$$

In diesen Verbindungen kommt jedes Element mit den Zeichen + und — vor, mehrere Verbindungen müssen sich also aufheben; welche Verbindungen hierdurch aus der Rechnung fallen und welche bleiben, finden wir auf folgende Weise. Wir trennen zuerst das erste Element von den übrigen

$$[2m,n+1;o]=n^{2m}+n^{2m-1}[1,n+1;+n]+n^{2m-2}[2,n+1;+n]+\ldots.$$
$$\ldots.+n\,[2m,n+1;+n]$$

und dann das letzte Element

$$=n^{2m}+n^{2m-1}\left|\begin{array}{l}-n^1\\ +n^o[1,n+1;+n,--n]\end{array}\right. \quad +n^{2m-2}\left|\begin{array}{l}+n^2\\ -n^1[1,n+1;+n,-n]\\ +n^o[2,n+1;+n,-n]\end{array}\right.$$

$$+n^{2m-3}\left|\begin{array}{l}-n^3\\ +n^2[1,n+1;+n,-n]\\ -n^1[2,n+1;+n,-n]\\ +n^o[3,n+1;+n,-n]\end{array}\right. \quad +\ldots+n^o\left|\begin{array}{l}+n^{2m}\\ -n^{2m-1}[1,n+1;+n,-n]\\ +n^{2m-2}[2,n+1;+n,\ \ n]\\ -n^{2m-3}[3,n+1;+n,-n]\\ \ldots\\ +n^o\ \ [2m,n+1;+n,-n]\end{array}\right.$$

$$= n^{2m} - n^{2m} + n^{2m} - \ldots + n^{2m}$$
$$+ (n^{2m-1} - n^{2m-1} + \ldots - n^{2m-1})[1,n+1;+n,-n]$$
$$+ (n^{2m-2} - n^{2m-2} + \ldots + n^{2m-2})[2,n+1;+n,-n]$$
$$+ (n^{2m-3} - n^{2m-3} + \ldots - n^{2m-3})[3,n+1;+n,-n]$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ n^{\cdot}[2m,n+1;+n,-n]$$

Hier ist offenbar, dafs sich diejenigen Verbindungen, in welchen n mit einer ungeraden Stellenzahl vorkommt, aufheben, und dafs nur die Verbindungen mit einer geraden Stellenzahl von n noch übrig bleiben; es ist also

$$[2m,n+1;0] = n^{2m} + n^{2m-2}[2,n+1;+n,-n] + n^{2m-4}[4,n+1;+n,-n] + \ldots$$
$$\ldots + n^{0}[2m,n+1;+n,-n] \quad . \quad . \quad (\beta$$

Diese Gleichung enthält zugleich die Vorschrift, wie die Verbindungen aus den Elementen n, n—2, n—4, . . . — (n—4), —(n—2), —n gebildet werden können aus den Verbindungen aus den Elementen n—2, n—4, ... —(n—4),—(n—2). Indem wir aber von n = 1 anfangen, und zu n=2, =3, . . . = n übergehen, können wir nach dieser Vorschrift alle überflüssigen Verbindungen aus der Rechnung bringen. Wir setzen daher n = 1, und erhalten nach β

$$[2m,2;0] = 1^{2m} = [m,1;0]$$
$$+1, -1 \qquad \text{aus } 1^{2}$$

Ist n = 3, so ist nach β

$$[2m,4;0] = 3^{2m} + 3^{2m-2}[2,2;0] + 3^{2m-4}[4,2;0] + \ldots + 3^{0}[2m,2;0]$$
$$+3,+1,-1,-3 \qquad \text{aus } +1,-1$$
$$= 3^{2m} + 3^{2m-2}[1,1;0] + 3^{2m-4}[2,1;0] + \ldots + 3^{0}[m,1;0]$$
$$\text{aus } 1^{2}$$
$$= [m,2;0]$$
$$\text{aus } 1^{2}, 3^{2}$$

Ist n = 5, so ist nach β

$$[_2m,6;o] = 5^{2m}+5^{2m-2}[2,4;o]+5^{2m-4}[4,4;o]+ \ldots +5^{o}[2m,4;o]$$

$+5,+3,+1,-1,-3,-5$ aus $+3,+1,-1,-3$

$$= 5^{2m}+5^{2m-2}[1,2;o]+5^{2m-4}[2,2;o]+ \ldots +5^{o}[m,2;o]$$

aus $1^2,3^2$

$$= [m,3;o]$$

aus $1^2,3^2,5^2$

Wir finden auf diesem Wege allgemein

$$[2m,2p;o] = [m,p;o] \quad . \quad (\gamma$$

$2p-1,2p-3,\ldots+1,-1,\ldots-(2p-3),-(2p-1)$ $\quad 1^2,3^2,5^2,\ldots(2p-1)^2$

Ist ferner $n = 2$, so ist nach β

$$[2m,3;o] = 2^{2m}+2^{2m-2}[2,1;o]+2^{2m-4}[4,1;o]+ \ldots +2^{o}[2m,1;o]$$

$+2,0,-2$ aus o

$$= 2^{2m} = [m,1;o]$$

aus 2^2

Ist $n = 4$, so ist nach β

$$[2m,5;o] = 4^{2m}+4^{2m-2}[2,3;o]+4^{2m-4}[4,3;o]+ \ldots +4^{o}[2m,3;o]$$

$+4,+2,0,-2,-4$ aus $+2,0,-2$

$$= 4^{2m}+4^{2m-2}[1,1;o]+4^{2m-4}[2,1;o]+ \ldots +4^{o}[m,1;o]$$

aus 2^2

$$= [m,2;o]$$

aus $2^2,4^2$

und allgemein

$$[2m,2p+1;o] = [m,p;o] \quad . \quad . \quad (\delta$$

$+2p,+2p-2,\ldots+2,-2,\ldots-(2p-2),-2p$ $\quad 2^2,4^2,6^2,\ldots(2p)^2$

Verbinden wir nun die Gleichungen α, γ, δ mit der Gleichung 213, so gewinnen wir folgende Bildungsweise für die Vorzahlen jenes Polynomiums

689) $\left\{\frac{i\psi p}{\partial^p}\right\}^n v(m+1) = \frac{1}{(n+1)^{2m|1}} \cdot [m, \frac{n+1}{2}; o]$ für ein ungerades n

$1^2, 3^2, 5^3, 7^2, \ldots n^2$

und $= \frac{1}{(n+1)^{2m|1}} \cdot [m, \frac{n}{2}; o]$ für ein gerades n

$2^2, 4^2, 6^2, \ldots n^2$

§. 204.

Die vorhergehenden Untersuchungen setzen uns in den Stand, mit Leichtigkeit die Summen von zusammengesetzteren Reihen zu suchen, welche ohne diese Vorbereitungen mit vielen Schwierigkeiten verbunden wären. Ist z. B.

$$f(x) = a_o + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

das allgemeine Glied der Reihe, welche entsteht, wenn $o, 1, 2, 3, \ldots . x$ statt x in dieser Reihe gesetzt wird, so können wir die Summe F(x) nach §. 166 auf acht verschiedene Arten darstellen; wählen wir unter diesen nur eine und zwar 555, so ist die Summe dieser Reihe

$$= F(x) = a_o \Sigma x^o + a_1 \Sigma x^1 + a_2 \Sigma x^2 + a_3 \Sigma x^3 + \ldots + a_n \Sigma x^n$$

$$= \tfrac{1}{1}\{a_o[o,1;o] + a_1[1,1;o] + a_2[2,1;o] + \ldots + a_n[n,1;o]\}x^{1|1}$$

$$- \tfrac{1}{2}\{a_1[o,2;o] + a_2[1,2;o] + \ldots + a_n[n-1,2;o]\}x^{2|1}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\{a_2[o,3;o] + a_3[1,3;o] + \ldots + a_n[n-2,3;o]\}x^{3|1}$$

$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(-)^n \cdot \frac{1}{n+1}[o,n+1;o]x^{n+1|1}$$

aus 1, 2, 3, 4, ...

Wir können die Aufgabe allgemeiner fassen, und

$$f'(x) = a_o(b+x)^o + a_1(b+x)^1 + a_2(b+x)^2 + \ldots + a_n(b+x)^n$$

zum allgemeinen Gliede einer Reihe annehmen; die Gleichungen in §. 165 werden in diesem Falle auf vier verschiedene Arten die Summe angeben.

Mit gleicher Leichtigkeit wird nach §. 163 die Summe der Reihe gefunden, deren allgemeines Glied aus den Producten

$$f''(x) = a_0(b+x)^{p|1}x^{0|1} + a_1(b+x)^{p+1|1}x^{1|1} + \ldots + a_n(b+x)^{p+n|1}x^{n|1}$$

besteht.

Die Summe der Reihe, deren allgemeines Glied f(x) aus Producten von gleichen Factoren bestehen, wird nach dem obigen durch Producte aus ungleichen Factoren bestehend dargestellt. Soll diese Summe durch Producte aus gleichen Factoren dargestellt werden, so werden vermittelst der Gleichung 298 die Producte aus gleichen Factoren, welche in dieser Summe vorkommen, in Producte mit ungleichen Factoren verwandelt.

VI. Abtheilung.

Summe der geordneten Verbindungen aus den Elementen $a+h,\ a+2h,\ a+3h,\ a+4h,\ \ldots\ldots$

§. 205.

In den früheren Untersuchungen kommen die geordneten Verbindungen aus den Elementen, die um gleichvieles zunehmen, oft vor; wir sind jetzt nach dem Vorhergehenden im Stande, zu zeigen, wie die Summen aller dieser Verbindungen gefunden werden können. Es ist

690) $$(1,x;0) = (a+h)x^{\underline{1}|1}+h(x-1)^{\underline{2}|1}$$

Aus dieser Summe werden die Summen der Verbindungen zu zweien, dreien, . . . Elementen vermittelst der Gleichung

691) $$(p,x;0) = (p-1,p-1;0)(a+ph)+(p-1,p;0)(a+ph+h)$$
$$+(p-1,p+1;0)(a+ph+2h)+\ldots+(p-1,x-1;0)(a+xh)$$

hergeleitet; setzen wir nämlich $p = 2$, so ist

$$(2,x;0) = (1,1;0)(a+2h)+(1,2;0)(a+3h)+\ldots+(1,x-1;0)(a+xh)$$

also nach 690

$$(2,x;0) = (a+h)\{(a+2h)1^{\underline{1}|1}+(a+3h)2^{\underline{1}|1}+\ldots+(a+xh)(x-1)^{\underline{1}|1}\}$$
$$+h\{(a+3h)1^{\underline{2}|1}+(a+4h)2^{\underline{2}|1}+\ldots+(a+xh)(x-2)^{\underline{2}|1}\}$$
$$=(a+h)\Sigma(a+xh)(x-1)^{\underline{1}|1}+h\Sigma(a+xh)(x-2)^{\underline{2}|1}$$

Nehmen wir nun die Summe nach 509, so erhalten wir folgende

692) $$(2,x;0) = (a+h)(a+2h)(x-1)^{\underline{2}|1}+2(a+h)\,h(x-2)^{\underline{3}|1}+3h^2(x-3)^{\underline{4}|1}$$
$$a+3h$$

Wir setzen $p = 3$

$$(3,x;0) = (2,2;0)(a+3h)+(2,3;0)(a+4h)+\ldots+(2,x-1;0)(a+xh)$$

und in 692, $x = 2, = 3, \ldots = x-1$, und erhalten

$$(3,x;o) = (a+h)(a+2h)\Sigma(a+xh)(x-2)^{2|1} + 2(a+h)\left|\begin{matrix} h\Sigma(a+xh)(x-3)^{3|1} \\ a+3h \end{matrix}\right| + 3h^2\Sigma(a+xh)(x-4)^{4|1}$$

und also nach 509 die Summe

693)
$$(3,x;o) = (a+h)(a+2h)(a+3h)(x-2)^{3|1} + \left|\begin{matrix} +3(a+h)(a+2h) \\ 2(a+h)(a+4h) \\ 1(a+3h)(a+4h) \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} h(x-3)^{4|1} \\ 4.2(a+h) \\ 4.1(a+3h) \\ 3.1(a+5h) \end{matrix}\right| h^2(x-4)^{5|1} + 1.3.5.h^3(x-5)^{6|1}$$

Um den Uebergang von der vorhergehenden Summe zu der unmittelbar folgenden im Allgemeinen vorlegen zu können, setzen wir

694) $$(p,x;o) = \mathfrak{H}(o,p)(x-p+1)^{p|1} + \mathfrak{H}(1,p)(x-p)^{p+1|1} + \mathfrak{H}(2,p)(x-p-1)^{p+2|1} + \ldots + \mathfrak{H}(p,p)(x-2p+1)^{2p|1}$$

Führen wir nun, so wie es die Gleichung 691 erfordert, in diese $p-1$ statt p und $p-1, p, p+1, \ldots, x-1$ statt x ein, so geht die Gleichung 691 in folgende über

$$\begin{aligned}(p,x;o) &= \mathfrak{H}(o,p-1).1^{p-1|1}(a+ph) \\ &\quad + \mathfrak{H}(o,p-1).2^{p-1|1}(a+ph+h) + \mathfrak{H}(1,p-1).1^{p|1}(a+ph+h) \\ &\quad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\quad + \mathfrak{H}(o,p-1)(x-p+1)^{p-1|1}(a+xh) + \mathfrak{H}(1,p-1)(x-p)^{p|1}(a+xh) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \mathfrak{H}(p-1,p-1)(x-2p+2)^{2p-2|1}(a+xh) \\ &= \mathfrak{H}(o,p-1)\Sigma(a+xh)(x-p+1)^{p-2|1} + \ldots \\ &\qquad \ldots + \mathfrak{H}(p-1,p-1)\Sigma(a+xh)(x-2p+2)^{2p-2|1}\end{aligned}$$

und nehmen wir die Summen nach der Gleichung 509

$$\begin{aligned}&= \mathfrak{H}(o,p-1)\{a+ph)(x-p+1)^{p|1} + ph(x-p)^{p+1|1}\} \\ &+ \mathfrak{H}(1,p-1)\{(a+ph+h)(x-p)^{p+1|1} + (p+1)h(x-p-1)^{p+2|1}\} \\ &+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ \mathfrak{H}(p-1,p-1)\{(a+2ph-h)(x-2p+2)^{2p-1|1} + (2p-1)h(x-2p+1)^{2p|1}\}\end{aligned}$$

Vergleichen wir diese Reihe mit der Reihe 694, so gewinnen wir folgende zurücklaufende Bestimmungen

$$695)\quad \mathfrak{H}(o,p) = (a+ph)\mathfrak{H}(o,p-1)$$
$$\mathfrak{H}(1,p) = (a+ph+h)\mathfrak{H}(1,p-1)+ph\mathfrak{H}(o,p-1)$$
$$\mathfrak{H}(2,p) = (a+ph+2h)\mathfrak{H}(2,p-1)+(p+1)h\mathfrak{H}(1,p-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{H}(q,p) = (a+ph+qh)\mathfrak{H}(q,p-1)+(p+q-1)h\mathfrak{H}(q-1,p-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{H}(p,p) = (2p-1)h\mathfrak{H}(p-1,p-1)$$

Nach diesen Gleichungen können wir aus der Summe von (3,x;o) jene von (4,x;o) und aus dieser wieder die späteren ableiten.

Ist $a = o$ und $h = 1$, so erhalten wir für die Elemente

$$1,2,3,4,\ldots,x$$

folgende Gleichung

$$696)\qquad \mathfrak{H}(q,p) = (p+q)\mathfrak{H}(q,p-1)+(p+q-1)\mathfrak{H}(q-1,p-1)$$

und aus dieser die Summen

$$697)\quad (1,x;o) = x^{\underline{2}|1}+(x-1)^{\underline{2}|1}$$
$$(2,x;o) = 2(x-1)^{\underline{2}|1}+2\,|\,3\,|\,(x-2)^{\underline{3}|1}+3(x-3)^{\underline{4}|1}$$
$$(3,x;o) = 2.3(x-2)^{\underline{3}|1}+3.2\,|\,2.4\,|\,3.4\,|\,(x-3)^{\underline{4}|1}+4.2\,|\,4.3\,|\,3.5\,|\,(x-4)^{\underline{5}|1}+3.5(x-5)^{\underline{6}|1}$$
$$(4,x;o) = 4.3.2(x-3)^{\underline{4}|1}+5.3.2\,|\,5.4.2\,|\,5.4.3\,|\,4.3.2\,|\,(x-4)^{\underline{5}|1}+6.4.2\,|\,6.4.3\,|\,6.5.3\,|\,5.3.2\,|\,5.4.2\,|\,5.4.3\,|\,(x-5)^{\underline{6}|1}+7.5.3\,|\,6.4.2\,|\,6.4.3\,|\,6.5.3\,|\,(x-6)^{\underline{7}|1}+$$
$$+7.5.3(x-7)^{\underline{8}|1}$$

Nehmen wir aber $a = -1$, $h = 1$ und $x = x+1$ an, so wird

698) $(1,x;0) = x^{2|1}$

$(2,x;0) = 2(x-1)^{3|1} + 3(x-2)^{4|1}$

$(3,x;0) = 3.2(x-2)^{4|1} + \begin{matrix}4.3\\4.2\end{matrix}|(x-3)^{5|1} + 5.3(x-4)^{6|1}$

$(4,x;0) = 4.3.2(x-3)^{5|1} + \begin{matrix}5.4.3\\5.4.2\\5.3.2\end{matrix}|(x-4)^{6|1} + \begin{matrix}6.5.3\\6.4.3\\6.4.2\end{matrix}|(x-5)^{7|1} + 7.5.3(x-6)^{8|1}$

§. 206.

Von der Gestalt der ersten Summe für $(1,x;0)$ und von der Wahl der Gleichung bei der Summirung der Reihen hängt auch die Gestalt der Summen aller späteren Verbindungsclassen ab. Legen wir bei den Elementen $a+h$, $a+2h$, . . . $a+xh$ die Gleichung

$$(1,x;0) = ax^{1|1} + hx^{2|1}$$

zum Grunde, so erhalten die Summen der späteren Verbindungsclassen folgende Gestalt

699) $(p,x;0) = g(0,p)(x-p+1)^{p|1} + g(1,p)(x-p+1)^{p+1|1} + g(2,p)(x-p+1)^{p+2|1}$
$+ \ldots + g(p-1,p-1)(x-p+1)^{2p|1}$

Verbinden wir diese Reihe mit der Reihe 691 auf die oben §. 205 gezeigte Weise und wählen zur Summirung die Gleichung 515, so erhalten wir folgende zurücklaufende Bestimmungen

700) $g(0,p) = ag(0,p-1)$

$g(1,p) = (a-h)g(1,p-1) + phg(0,p-1)$

$g(2,p) = (a-2h)g(2,p-1) + (p+1)hg(1,p-1)$

. . . . . .

$g(q,p) = (a-qh)g(q,p-1) + (p+q-1)hg(q-1,p-1)$

. . . . . .

$g(p,p) = (2p-1)hg(p-1,p-1)$

Da nun $g(0,1) = a$ und $g(1,1) = h$ bekannt sind, so lassen sich nach vorstehenden Gleichungen die Vorzahlen der Producte bei den späteren Verbindungsclassen finden.

Ist $a = 0$ und $h = 1$, so ist für die Elemente $1,2,3,\ldots x$

701) $(1,1;0) = x^{[2|1]}$

$$(2,x;0) = -1.(x-1)^{[3|1]} + 3(x-1)^{[4|1]}$$

$$(3,x;0) = +1.1(x-2)^{[4|1]} - \begin{vmatrix}2.3\\4.1\end{vmatrix}(x-2)^{[5|1]} + 5.3(x-2)^{[6|1]}$$

$$(4,x;0) = -1.1.1(x-3)^{[5|1]} + \begin{vmatrix}2.2.3\\2.4.1\\5.1.1\end{vmatrix}(x-3)^{[6|1]} - \begin{vmatrix}3.5.3\\6.2.3\\6.4.1\end{vmatrix}(x-3)^{[7|1]} + 7.5.3(x-3)^{[8|1]}$$

und ist $a = -1$, $h = 1$ und $x = x+1$, so ist für dieselben Elemente

702) $(1,x;0) = -(x+1)^{[1|1]} + (x+1)^{[2|1]}$

$$(2,x;0) = +1x^{[2|1]} - \begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix}x^{[3|1]} + 3x^{[4|1]}$$

$$(3,x;0) = -1.1(x-1)^{[3|1]} + \begin{vmatrix}2.2\\2.2\\3.1\end{vmatrix}(x-1)^{[4|1]} - \begin{vmatrix}3.3\\4.2\\4.2\end{vmatrix}(x-1)^{[5|1]} + 5.3(x-1)^{[6|1]}$$

$$(4,x;0) = 1.1.1(x-2)^{[4|1]} - \begin{vmatrix}2.2.2\\2.2.2\\2.3.1\\4.1.1\end{vmatrix}(x-2)^{[5|1]} + \begin{vmatrix}3.3.3\\3.4.2\\3.4.2\\5.2.2\\5.2.2\\5.3.1\end{vmatrix}(x-2)^{[6|1]} - \begin{vmatrix}4.5.3\\6.3\,3\\6.4.2\\6.4.2\end{vmatrix}(x-2)^{[7|1]} + 7.5.3(x-2)^{[8|1]}$$

§. 207.

Geben wir der ersten Summe die Gestalt

$$(1,x;0) = (a+b)x^{[2|1]} - a(x-1)^{[2|1]}$$

so ist jene der späteren Summen folgende

703) $(p,x;0) = f(0,p)(x-p+1)^{[2p|1]} + f(1,p)(x-p)^{[2p|1]} + \ldots + f(p,p)(x-2p+1)^{[2p|1]}$

Die Verbindung dieser Reihe mit der Reihe 691 vermittelst der Gleichung 520 führt zu der zurücklaufenden Bestimmung

$$704)\quad \begin{aligned} f(o,p) &= (a+ph)f(o,p-1)\\ f(1,p) &= (a+ph+1h)f(1,p-1)-(a-ph+h)hf(o,p-1)\\ f(2,p) &= (a+ph+2h)f(2,p-1)-(a-ph+2h)hf(1,p-1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f(q,p) &= (a+ph+qh)f(q,p-1)-(a-ph+qh)hf(q-1,p-1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f(p,p) &= -ahf(p-1,p-1) \end{aligned}$$

Ist $a = o$ und $h = 1$, so ergeben sich nach diesen Gleichungen für die Elemente $1,2,3,\ldots x$ folgende Summen

$$705)\quad \begin{aligned} (1,x;o) &= x^{[1]}\\ (2,x;o) &= 2(x-1)^{[1]}+1(x-2)^{[1]}\\ (3,x;o) &= 2.3(x-2)^{[1]}+\left.\begin{matrix}4.1\\2.2\end{matrix}\right|(x-3)^{[1]}+1.1(x-4)^{[1]}\\ (4,x;o) &= 2.3.4(x-3)^{[1]}+\left.\begin{matrix}5.4.1\\5.2.2\\3.2.3\end{matrix}\right|(x-4)^{[1]}+\left.\begin{matrix}6.1.1\\2.4.1\\2.2.2\end{matrix}\right|(x-5)^{[1]}+1.1.1(x-6)^{[1]} \end{aligned}$$

Wird $a = -1$ und $x = x+1$ gesetzt, so entstehen dieselben Producte mit denselben Vorzahlen.

§. 208.

Auf gleiche Weise wird die Summe der geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen

$$a+h,\ a+2h,\ a+3h,\ \ldots,\ a+xh$$

gefunden. Es ist

$$[1,x;o] = (a+h)x^{[1]}+h(x-1)^{[2]}$$

Beim Uebergange zu der Summe der späteren Verbindungsclassen wird die Gleichung

706) $[p,x;o] = [p-1,1;o](a+h)+[p-1,2;o](a+2h)+\ldots+[p-1,x;o](a+xh)$

zum Grunde gelegt. Setzen wir nun

707) $[p,x;o] = q(o,p)x^{p|1}_{,}+q(1,p)(x-1)^{p+1|1}_{,}+q(2,p)(x-2)^{p+2|1}_{,}+\ldots$
$\ldots+q(p,p)(x-p)^{2p|1}_{,}$

und verbinden diese Gleichungen auf die oben gezeigte Weise vermittelst der Gleichung 509, so erhalten wir folgende zurücklaufende Bestimmungen

708) $q(o,p) = (a+h)q(o,p-1)$
$q(1,p) = (a+2h)q(1,p-1)+phq(o,p-1)$
$q(2,p) = (a+3h)q(2,p-1)+(p+1)hq(1,p-1)$
. . . . . .
$q(q,p) = (a+qh+h)q(q,p-1)+(p+q-1)hq(q-1,p-1)$
. . . . . .
$q(p,p) = (2p-1)hq(p-1,p-1)$

§. 209.

Gehen wir von der Gleichung

$$[1,x;o] = ax^{1|1}_{,}+hx^{2|1}_{,}$$

aus, so erhalten die Summen der späteren Verbindungen folgende Gestalt

709) $[p,x;o] = f(o,p)x^{p|1}_{,}+f(1,p)x^{p+1|1}_{,}+f(2,p)x^{p+2|1}_{,}+\ldots+f(p,p)x^{2p|1}_{,}$

Verbinden wir diese Gleichung mit 706, so ergeben sich folgende zurücklaufende Bestimmungen

710) $f(o,p) = (a-ph+h)f(o,p-1)$
$f(1,p) = (a-ph)f(1,p-1)+phf(o,p-1)$
$f(2,p) = (a-ph-h)f(2,p-1)+(p+1)hf(1,p-1)$
. . . . . .
$f(q,p) = (a-ph-qh+h)f(q,p-1)+(p+q-1)hf(q-1,p-1)$
. . . . . .
$f(p,p) = (2p-1)hf(p-1,p-1)$

§. 210.

Legen wir die Gleichung

$$[1,x;o] = (a+h)x^{\underline{2|1}}-a(x-1)^{\underline{2|1}}$$

zum Grunde, so erhalten die Summen der späteren Verbindungsclassen die Gestalt

711) $$[p,x;o] = t(o,p)x^{\underline{2p|1}}+t(1,p)(x-1)^{\underline{2p|1}}+t(2,p)(x-2)^{\underline{2p|1}}+ \ldots$$
$$\ldots +t(p,p)(x-p)^{\underline{2p|1}}$$

Wird diese Gleichung mit der Gleichung 706 vermittelst 520 verbunden, so erhalten wir folgende zurücklaufende Bestimmungen

712)
$$t(o,p) = (a+h)t(o,p-1)$$
$$t(1,p) = (a+2h)t(1,p-1)-(a-2ph+2h)t(o,p-1)$$
$$t(2,p) = (a+3h)t(2,p-1)-(a-2ph+3h)t(1,p-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t(q,p) = (a+qh+h)t(q,p-1)-(a-2ph+qh+h)t(q-1,p-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t(p,p) = -(a-ph+h)t(p-1,p-1)$$

§. 211.

Setzen wir $a = o$ und $h = 1$, so erhalten wir die Summe der geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... x nach 708

713
$$[1,x;o] = 1.x^{\underline{1|1}}+1.(x-1)^{\underline{2|1}}$$
$$[2,x,o] = \begin{matrix}1\ 1\\ 2.1\end{matrix}\Big|x^{\underline{2|1}}+\begin{matrix}2.1\end{matrix}\Big|(x-1)^{\underline{3|1}}+3.1(x-2)^{\underline{4|1}}$$
$$[3,x,o] = \begin{matrix}1.1.1\\ 2.2.1\\ 3.1.1\end{matrix}\Big|x^{\underline{3|1}}+\begin{matrix}2.2.1\\ 3.1.1\end{matrix}\Big|(x-1)^{\underline{4|1}}+\begin{matrix}3.3.1\\ 4.2.1\\ 4.2.1\end{matrix}\Big|(x-2)^{\underline{5|1}}+5.3.1(x-3)^{\underline{6|1}}$$

$$[4,x;o] = 1.1.1.1x^{\underline{4}|1}+\begin{vmatrix}2.2.2.1\\2.2.2.1\\2.3.1.1\\4.1.1.1\end{vmatrix}(x-1)^{\underline{5}|1}+\begin{vmatrix}3.3.3.1\\3.4.2.1\\3.4.2.1\\5.2.2.1\\5.2.2.1\\5.3.1.1\end{vmatrix}(x-2)^{\underline{6}|1}+\begin{vmatrix}4.5.3.1\\6.3.3.1\\6.4.2.1\\6.4.2.1\end{vmatrix}(x-3)^{\underline{7}|1}$$

$$+7.5.3.1(x-4)^{\underline{8}|1}$$

nach 710 ist

714) $[1,x;o] = x^{\underline{2}|1}$

$$[2,x;o] = -2x^{\underline{3}|1}+3x^{\underline{4}|1}$$

$$[3,x;o] = 3.2x^{\underline{4}|1}-\begin{vmatrix}4.3\\4.2\end{vmatrix}x^{\underline{5}|1}+5.3x^{\underline{6}|1}$$

$$4,x;o] = -4.3.2x^{\underline{5}|1}+\begin{vmatrix}5.4.3\\5.4.2\\5.3.2\end{vmatrix}x^{\underline{6}|1}-\begin{vmatrix}6.5.3\\6.4.3\\6.4.2\end{vmatrix}x^{\underline{7}|1}+7.5.3x^{\underline{8}|1}$$

und nach 712 ist

715) $[1,x;o] = x^{\underline{2}|1}$

$$[2,x;o] = 1.x^{\underline{4}|1}+2.(x-1)^{\underline{4}|1}$$

$$[3,x;o] = 1.1.x^{\underline{6}|1}+\begin{vmatrix}2.2\\4.1\end{vmatrix}(x-1)^{\underline{6}|1}+3.2(x-2)^{\underline{6}|1}$$

$$[4,x;o] = 1.1.1x^{\underline{8}|1}+\begin{vmatrix}2.2.2\\2.4.1\\6.1.1\end{vmatrix}(x-1)^{\underline{8}|1}+\begin{vmatrix}2.3.2\\5.2.2\\5.4.1\end{vmatrix}(x-2)^{\underline{8}|1}+4.3.2(x-3)^{\underline{8}|1}$$

§. 212.

Setzen wir $a = -1$, $h = 1$ und $x = x+1$, so nehmen die Summen der geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen

$$1, 2, 3, 4, \ldots x$$

folgende Gestalt an

716) $[p,x;o] = q(1,p)x^{\underline{p+1}|1}+q(2,p)(x-1)^{\underline{p+2}|1}+\ldots+q(p,p)(x-p+1)^{\underline{2p}|1}$

717) $= f(o,p)(x+1)^{\underline{p}|1}+f(1,p)(x+1)^{\underline{p+1}|1}+\ldots+f(p,p)(x+1)^{\underline{2p}|1}$

718) $= t(1,p)x^{\underline{2p|1}}+t(2,p)(x-1)^{\underline{2p|1}}+\ldots+t(p,p)(x-p+1)^{\underline{2p|1}}$

Die zurücklaufende Bestimmung der Vorzahlen dieser Producte ist

719) $q(q,p) = qq(q,p-1)+(p+q-1)q(q-1,p-1)$

720) $f(q,p) = -(p+q)f(q,p-1)+(p+q-1)f(q-1,p-1)$

721) $t(q,p) = qt(q,p-1)+(2p-q)t(q-1,p-1)$

Nach diesen Gleichungen erhalten wir folgende Summen

722) $[1,x;0] = x^{\underline{2|1}}$

$[2,x;0] = 1.x^{\underline{3|1}}+3(x-1)^{\underline{4|1}}$

$[3,x;0] = 1.1.x^{\underline{4|1}}+4.1(x-1)^{\underline{5|1}}+5.3(x-2)^{\underline{6|1}}$

$[4,x;0] = 1.1.1.x^{\underline{5|1}}+2.2\ 3(x-1)^{\underline{6|1}}+3.5.3(x-2)^{\underline{7|1}}+7.5.3(x-3)^{\underline{8|1}}$
$2.4.1 \qquad 6.2.3$
$5.1.1 \qquad 6.4.1$

723) $[1,x;0 = -(x+1)^{\underline{1|1}}+(x+1)^{\underline{2|1}}$

$[2,x;0] = +2(x+1)^{\underline{2|1}}-\frac{2}{3}\Big|(x+1)^{\underline{3|1}}+3(x+1)^{\underline{4|1}}$

$[3,x;0] = -3.2(x+1)^{\underline{3|1}}+\frac{4.3}{4.2}\Big|(x+1)^{\underline{4|1}}-\frac{5.3}{4.3}\Big|(x+1)^{\underline{5|1}}+5.3(x+1)^{\underline{6|1}}$

$[4,x;0] = 4.3.2(x+1)^{\underline{4|1}}-\frac{5.4.3}{5.4.2}(x+1)^{\underline{5|1}}+\frac{6.5.3}{6.4.3}(x+1)^{\underline{6|1}}-\frac{7.5.3}{6.5.3}(x+1)^{\underline{7|1}}+$
$5.3.2 \qquad 6.4.2 \qquad 6.4.3 \quad +7.5.3(x+1)^{\underline{8|1}}$
$4.3.2 \qquad 5.4.3 \qquad 6.4.2$
$5.4.2$
$5.3.2$

724) $[1,x;0] = x^{\underline{2|1}}$

$[2,x;0] = 1.x^{\underline{4|1}}+2(x-1)^{\underline{4|1}}$

$[3,x;0] = 1.1.x^{\underline{6|1}}+\frac{2\ 2}{4.1}\Big|(x-1)^{\underline{6|1}}+3.2(x-2)^{\underline{6|1}}$

$[4,x;0] = 1.1.1.x^{\underline{8|1}}+2.2.2(x-1)^{\underline{8|1}}+3.3.2(x-2)^{\underline{8|1}}+4.3.2(x-3)^{\underline{8|1}}$
$2.4.1 \qquad 5.2.2$
$6.1.1 \qquad 5.4.1$

Universitätsbuchdruckerei von J. M. Gutmann.

Verbesserungen.

Seite 3 Zeile 7 statt x^{n-1} lese man x^{n-2}

S. 12 Z. 4 von oben st. $1 \cdot 2 \cdot \overset{5}{a}\overset{5}{a}$ l. $\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}\overset{5}{a}\overset{5}{a}$

S. 20 Z. 6 st. pte l. (p+1)te

S. 21 Z. 10 st. Elementen gebildet l. Elementen zu p Elementen gebildet

S. 24 Z. 5 st. C l. ^{2}C

S. 32 Z. 3 st. $\frac{1-\overset{1}{b}x^{1}-\overset{2}{b}x^{2}-\ldots.}{1+\overset{1}{a}x^{1}+\overset{2}{b}x^{2}+\ldots.}$ l. $\frac{1+\overset{1}{b}x^{1}+\overset{2}{b}x^{2}+\ldots.}{1-\overset{1}{a}x^{1}-\overset{2}{a}x^{2}-\ldots.}$

S. 36 Z. 4 st. (n+1)(n+2) l. n(n+1)(n+2)

S. 39 Z. 7 v. unten st. $(x+a^{m})$ l. $(x+a)^{m}$

S. 41 Z. 10 st. der letzten $^{p}\mathfrak{A}^{3}.\,^{q}\mathfrak{A}^{0}$ l. $^{p}\mathfrak{A}^{0}\,^{q}\mathfrak{A}^{3}$

S. 45 Z. 6 st. $^{m}\overset{k}{C}a^{f+g-h}$ l. $^{m}\overset{k}{C}a^{f+g-k}$

S. 45 Z, 8 v. u. st. $^{m-p-q}\overset{q}{C}$ l. $^{m-p+q}\overset{q}{C}$

S. 48 Z. 6 st. $P^{n}v_{1}x^{n}+P^{n}v_{2}x^{n+1}+\ldots$ l. $P^{n}v_{1}+P^{n}v_{2}x^{1}+\ldots+P^{n}v_{q}x^{q-1}+\ldots$

S. 52 Z. 2 v. u. st. $(-\frac{n-m+2}{2}-)$ l. $(1-\frac{n-m+2}{2}-)$

S. 54 Z. 12 v. u. st $U^{n}(m+1)$ l. $U^{n}v(m+1)$

S. 55 Z. 10 v. u. st. $1 \cdot \overset{1}{a}|\overset{1\,1\,2}{a\,a\,a}$ l. $1 \cdot \overset{1}{a}|\overset{1\,1\,3}{a\,a\,a}$

S. 56 Z. 13 v. u. st. P^{n} l. U^{n}

S. 57. Z. 12 st. P^{p} l. P^{n}

S. 57 Z. 6 v. u. st. $-p\beta+\beta$ l. $-p\beta-\beta$

S. 58 Z. 1 st. U l. U^{p}

S. 58 Z. 6 v. u. st. $\alpha+$ l. $(\alpha+$

S. 63 Z. 8 v. u. st. f+22 l. f+2c

S. 64 Z. 11 st. v(p+1) l. yv(p+1)

S. 66 Z. 3 st. f+me l. f+mc

S. 67 Z. 1 st. x l x^{3}

S. 68 stehen die Stellenzahlen zur Linken des b, sie müssen über b gesetzt werden

S. 68 Z. 2 v. u. st. yv_1 l. b^{1}

S. 68 Z. 1 v. u. st. yv_2 l. b^{2}

S. 70 Z. 3 v. u. st. v l. v_1

S. 73 Z. 8 st. $v_3 Q^{\frac{n+d}{s}}$ l. $v_3 Q^{\frac{n+2d}{s}}$

S. 79 Z. 8 v. u. st. $1, 2, \ldots . m+q$ l. $1 . 2 \ldots . m+q-1$

S. 85 Z. 11 v. u. st. A^f l. A^1

S. 88. Z. 6 st. c^{m+c} l. c^{m+1}

S. 88 Z. 8 v. u. st. $\frac{1}{2}$ l. $\frac{1}{2}$

S. 95 Z. 2 u. 3 sind die Brüche nicht ganz ausgedrückt, sie sind $\frac{u}{x}$ und

$$\frac{u}{2x+u}$$

S. 96 Z. 2 st. $\lg(1+x =$ l. $\lg(1+x) =$

S. 100 Z. 11 v. u. st P^{o-1} l. P^{n-1}

S. 109. Z. 7 st. E l. E^n

S. 112 Z. 13 v. u. st. $o+o = o$ l. $n(-)^{n+1}+n(-)^n = o$

S. 112 Z. 5 v. u. st. $= \Sigma$ l. $= (-)^n k(n+1,n+1)+\Sigma$

S. 119 Z. 7. v. u. st. = l. —

S. 120 Z. 4. st. $\left\{\frac{e^x-1^{-1}}{x}\right\}$ l. $\left\{\frac{e^x-1}{x}\right\}^{-1}$

S. 122 Z. 11 st. $2\varphi 2x$ l. $2\varphi x$

S. 128. Z. 6 st. $4.4.H^2v_3+2.1$ l. $3.4.4.H^2v_3+3.2.1$

S. 137 Z. 10 st. diese l. die

S. 141 Z. 9 statt $]^u$ l. $]^n$

S. 141 Z. 11 v. u. st. $(\varphi)^2$ l. $(\varphi_1)^2$

S. 144 Z. 12 st. δ^{-2n} l. δ^{2n}

S. 144 Z. 2 v. u. st. 146 und 147 l. 144 und 145

S. 145 Z. 2 st. $(\varphi_1-i\psi_1)^{-1}$ l. $(\varphi_1+i\psi_1)^{-1}$

S. 149 Z. 8 v. u. st. des zu Ende stehenden n^1 l. n^2

S. 150 Z. 10 st. $\psi_1+i\psi_1$ l. $\varphi_1+i\psi_1$

S. 151 Z. 5 v. u. st. $\frac{\varphi n - i \cdot \psi n}{\varphi n + i \cdot \psi n}$ l. $\frac{\varphi n + i \cdot \psi n}{\varphi n - i \cdot \psi n}$

S. 152 Z. 5 v. u. st. $e^{i.\lambda n} + e^{i.\lambda n}$ l. $e^{i.\lambda n} + e^{-i.\lambda n}$

S. 152 Z. 2 v. u. st. $e^{i.\lambda n} - e^{i.\lambda n}$ l. $e^{i.\lambda n} - e^{-i.\lambda n}$

S. 154 Z. 3 st. 2q+ l. 2p+

S. 154 Z. 7 v. u. st. = ψ l. = (

S. 160 Z. 5 st. $2^{2m} 1^{2m-1}$ l. $2^{2m} (1^{2m-1}$

S. 166 Z. 7 v. u. st. $\left\{ \frac{e^{2i\lambda p}}{2i\lambda p . e^{i\lambda p}} - \right\}$ l. $\left\{ \frac{e^{2i\lambda p} - 1}{2i\lambda p \, . \, e^{i\lambda p}} - \right\}$

S. 175 Z. 2 v. u. st. $(-)^u$ l. $(-)^n$

S. 179 Z. 5 st. $\frac{1}{a-r}$, a l. $\frac{1}{a-r}$, 1, a

S. 179 Z. 10 v. u. st. $a^{n|-r}$ l. $(a-r)^{n|-r}$

R. 180 Z. 3 v. u. st. $1^{2n|r}$ l. $1^{2n|1}$

S. 181 Z. 11 st. $n^2 b$ l. $n^2 c$

S. 182 Z. 7 st. $a^{+u|r}$ l. $a^{+n|r}$

S. 182 Z. 10 st. $'C$ l. $'\overset{2}{C}$

S. 184 Z. 5 v. u. st. $1^{-n|r}$ l. $1^{-n|-r}$

S. 192 Z. 8 st. $a^{n-1|r}$ l. $a^{n+1|r}$

S. 199 Z. 1 st. $a^{-n-1|p}$ l. $a^{-n-1|r}$

S. 307 Z. 10 v. u. st. $),^{+6|1}$ l. $),^{n+6|1}$

S. 309 Z. 8 st. u l. n

S. 309 Z. 10 st a_r l. a_2

S. 310 Z. 13 st. des letzten $x,^{n+1|1}$ l. $(x-1),^{n+1|1}$

S. 353 Z. 12 st. [q,n;o] l. [q,n+1;o]

S. 367 Z. 11 st. fx) l. f(x)

Minder bedeutende Fehler wolle der geneigte Leser nachsehen.

Minder bedeutende Teile wolle der geneigte Leser machinieren.